Lycée de la Plaine de l'Ain - Ambérieu en Bugey.

Année scolaire 2006 / 2007.

TERMINALES SCIENTIFIQUES

BACCALAUREAT BLANC

EPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures.

>>> Calculatrice autorisée. <<<

La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction
interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats auront à traiter 5 exercices (dont un QCM en annexe).
L'exercice 4 est différent pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité.

EXERCICE I (*5 points*)

Dans le plan complexe $\mathcal{P}$ rapporté au repère orthonormal direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, unité 2 cm, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $a = -1 + 3i$, $b = -2$, $c = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2}i$ et $d = i$.

On fera une figure qui sera complétée au fur et à mesure de l'exercice.

Soit l'application f du plan $\mathcal{P}$ privé de A dans $\mathcal{P}$ qui, à tout point M d'affixe z distincte de a , associe le point M' d'affixe z' tel que : $z' = \dfrac{z+2}{z+1-3i}$.

1°) a) Déterminer l'affixe du point E image du point D par la rotation r de centre B et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

b) Vérifier que C est le milieu des segments [AB] et [DE].

c) Quelle est la nature du quadrilatère ADBE ?

2°) a) Déterminer l'affixe (*sous forme algébrique*) du point E' image du point E par f.

b) Déterminer les affixes des points invariants par f.

3°) Déterminer et construire l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M d'affixe z tels que M' appartienne au cercle de centre O et de rayon 1.

4°) a) Montrer pour tout z différent de a , l'équivalence suivante :

$$\frac{-z-2}{z+1-3i} = \frac{\bar{z}+2}{\bar{z}+1+3i} \Leftrightarrow (z-c)\overline{(z-c)} = \frac{5}{2}.$$

b) En déduire l'ensemble $\mathcal{F}$ des points M d'affixe z tels que z' soit un imaginaire pur.

Construire $\mathcal{F}$.

EXERCICE II - roc (*3 points*)

Pré-requis :

- la fonction logarithme népérien est dérivable sur] 0 ; $+\infty$ [
  et sa fonction dérivée est la fonction inverse ($x \mapsto \frac{1}{x}$).
- ln (1)= 0.

1. Démontrer que pour tous réels a et x strictement positifs, ln(ax) = ln(a)+ln(x).

2. Utiliser le résultat précédent pour démontrer que, pour tous réels strictement positifs a et b :
   $\ln \frac{1}{b} = -\ln b$ et que $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$.

3. On donne 0,69 $\leq$ ln2 $\leq$ 0,70 et 1,09 $\leq$ ln3 $\leq$ 1,10.
   En déduire des encadrements de ln6, $\ln \frac{1}{6}$ et $\ln \frac{3}{8}$.

EXERCICE III (*4 points*)

On considère les deux suites réelles (U_n) et (V_n) définies par :

$U_0 = 4$; $V_0 = 0$; Pour tout entier naturel n : $U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n - \frac{1}{4}V_n$ et $V_{n+1} = U_n + \frac{1}{2}V_n$.

1. a) Calculer U_1, V_1 ,U_2, V_2 ,U_3 et V_3.

   b) La suite (U_n) est-elle arithmétique ? Est-elle géométrique ?

2. On considère la suite complexe $(a_n)_{n\in IN}$ définie par $a_n = U_n + \frac{i}{2}V_n$.

   a) Démontrer que la suite $(a_n)_{n\in IN}$ est géométrique de raison q = $\frac{1+i}{2}$.

   b) Ecrire q sous forme exponentielle.

   c) Prouver que, pour tout entier naturel n, $a_n = 4\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n e^{i n \frac{\pi}{4}}$.

   d) En déduire U_n en fonction de n.

   e) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

EXERCICE IV (*5 points*) –

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. Pour tout entier naturel n non nul, on considère la fonction f_n définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f_n(x) = \ln x + \frac{x}{n} - 1 .$$

a. Déterminer les limites de f_n en 0 et en $+\infty$ puis étudier le sens de variation de f_n.

b. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution dans $]0\,;+\infty[$.
On note α_n cette solution. Montrer qu'elle appartient à l'intervalle [1 ; e].

2. Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$. On note Γ la courbe représentative de la fonction logarithme népérien.

a. Soit n un entier naturel non nul. Déterminer une équation de la droite Δ_n passant par le point A de coordonnées (0 ; 1) et le point B_n de coordonnées (n ; 0).

b. Tracer les droites Δ_1, Δ_2 et Δ_3 sur la figure représentant la courbe Γ, sur l'annexe.

c. Montrer que α_n est l'abscisse du point d'intersection de Γ avec Δ_n.

d. Préciser la valeur de α_1 puis faire une conjecture sur le sens de variation de la suite (α_n).

3. a. Exprimer $\ln(\alpha_n)$ en fonction de n et de α_n.

b. Exprimer $f_{n+1}(\alpha_n)$ en fonction de n et de α_n et vérifier que : $f_{n+1}(\alpha_n) < 0$.

c. Déduire de la question précédente le sens de variation de la suite (α_n).

d. Montrer que la suite (α_n) converge. On note ℓ sa limite.
Établir que : $\ln \ell = 1$ et en déduire la valeur de ℓ.

EXERCICE IV (*5 points*) -

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Pour tout entier naturel n non nul, on considère les nombres

$$a_n = 4\times 10^n - 1 \qquad b_n = 2\times 10^n - 1 \qquad c_n = 2\times 10^n + 1.$$

1 – a) Calculer $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3$ et c_3.

b) Combien les écritures décimales des nombres a_n et c_n ont-elles de chiffres ?

Montrer que a_n et c_n sont divisibles par 3.

c) Montrer, en utilisant la liste des nombres premiers inférieurs à 100 donnée ci-dessous, que b_3 est premier.

d) Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, $b_n \times c_n = a_{2n}$.

En déduire la décomposition en produit de facteurs premiers de a_6.

e) Montrer que $PGCD(b_n, c_n) = PGCD(c_n, 2)$.

En déduire que b_n et c_n sont premiers entre eux.

2 – On considère l'équation $(E) : b_3 x + c_3 y = 1$ d'inconnues les entiers relatifs x et y.

a) Justifier le fait que (E) possède au moins une solution.

b) Appliquer l'algorithme d'Euclide aux nombres c_3 et b_3.

En déduire une solution particulière de (E)

c) Résoudre l'équation (E)

Liste des nombres premiers inférieurs à 100 : 2 – 3 – 5 – 7 – 11 – 13 – 17 – 19 – 23 – 29 – 31 – 37 – 41 – 43 – 47 – 53 – 59 – 61 – 67 – 71 – 73 – 79 – 83 – 89 – 97

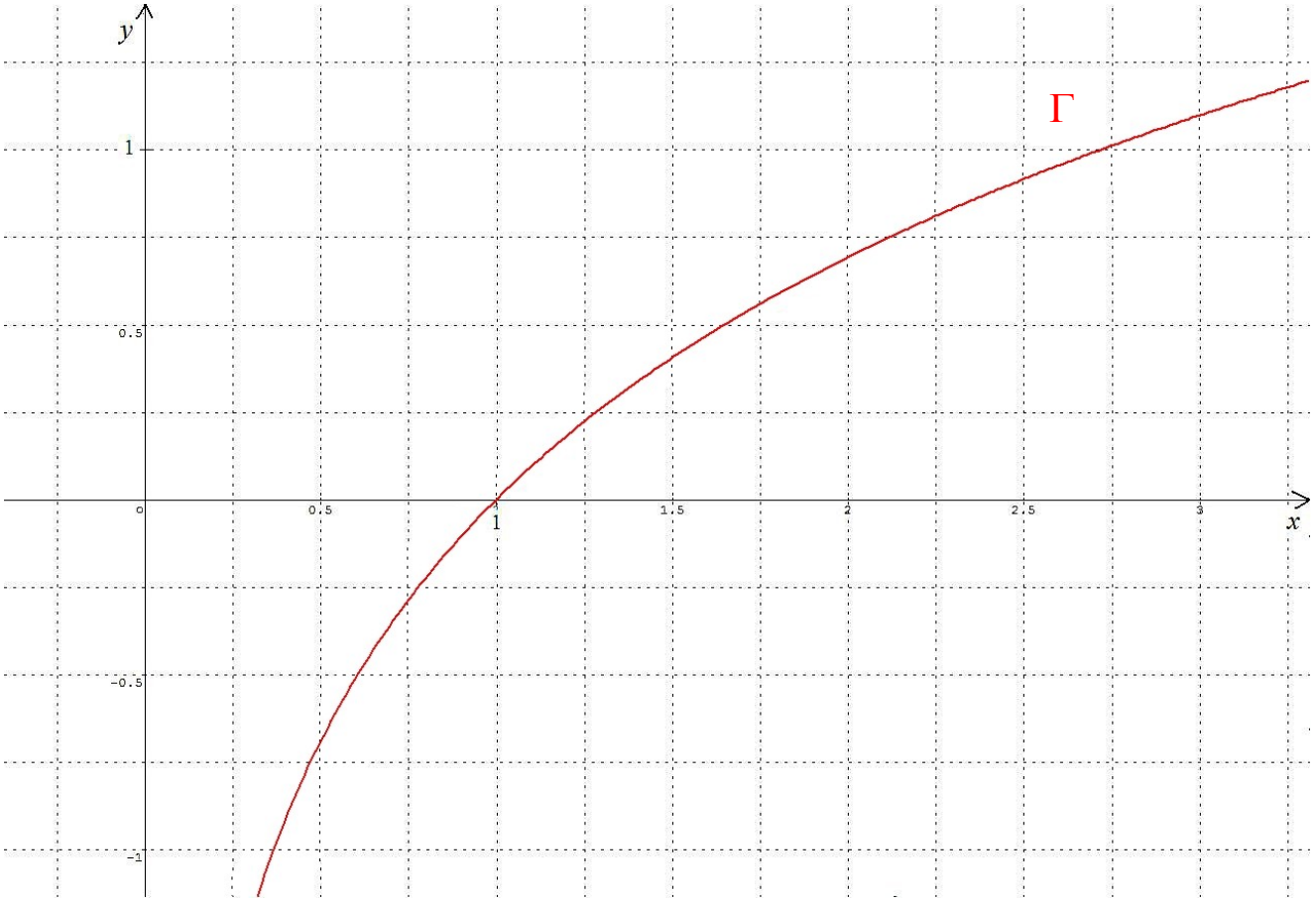
ANNEXE – A rendre avec la copie.

NOM - Prénom : Classe :

EXERCICE V - QCM (3 points)

Pour chaque question une seule des quatre réponses proposées est exacte. Aucune justification n'est demandée. Chaque bonne réponse rapporte 1 point, chaque réponse fausse enlève 0,5 point, l'absence de réponse vaut 0 point. Si le total des points de l'exercice est négatif, la note est ramenée à 0.

Vous répondrez sur cette annexe en cochant la case correspondant à votre réponse.

1.	La fonction f définie sur [0 , + ∞ [par $f(x)=\begin{cases} x e^{-\frac{1}{x}} & si \quad x>0 \\ 0 & si \quad x=0 \end{cases}$ est :	dérivable en 0 de dérivée 1 ❑	
		dérivable en 0 de dérivée 0 ❑	
		n'est pas dérivable en 0 ❑	
		n'est pas continue en 0 ❑	
2.	Soit f la fonction définie sur IR par $f(x)=\sqrt{1+e^x}$. Alors $f'(0)$ est égal à :	$\frac{1}{\sqrt{2}}$ ❑	$\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ❑
		$\frac{1}{2\sqrt{2}}$ ❑	$\frac{3\sqrt{2}}{4}$ ❑
3.	Soit f la fonction définie sur] 0 , + ∞ [par $f(x)=\ln x+1$, et C_f sa courbe représentative dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$. Les coordonnées du point d'intersection de C_f avec l'axe des abscisses sont :	$(-e\,,0)$ ❑	
		$(\frac{1}{e},0)$ ❑	
		$(0\,,0)$ ❑	
		$(e\,,0)$ ❑	

EXERCICE IV – (candidats non spécialistes). - Graphique