

TERMINALES SCIENTIFIQUES ~ BBB ~ Corrigé**EXERCICE I (5 points)**

A, B, C et D points d'affixes respectives $a = -1 + 3i$, $b = -2$, $c = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2}i$ et $d = i$.

Soit l'application f du plan $\mathcal{P}$ privé de A dans $\mathcal{P}$ qui, à tout point M d'afixe z distincte de a ,

associe le point M' d'afixe z' tel que : $z' = \frac{z+2}{z+1-3i}$.

1°) a) $z_E - z_B = e^{i\frac{\pi}{2}}(z_D - z_B)$, d'où $z_E = -2 + i(i+2)$, d'où $\boxed{z_E = -3 + 2i}$.

b) $\frac{z_A + z_B}{2} = \frac{-1 + 3i - 2}{2} = \frac{-3 + 3i}{2} = z_C$; donc C est le milieu du segment [AB]

$\frac{z_D + z_E}{2} = \frac{i - 3 + 2i}{2} = \frac{-3 + 3i}{2} = z_C$; donc C est le milieu du segment [DE].

c) Les diagonales du quadrilatère ADBE se coupent en leur milieu C, donc ADBE est un parallélogramme.

Or $E = r(D)$ donc $(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BE}) = \frac{\pi}{2} (2\pi)$ et $BD = BE$; ADBE est donc un carré.

2°) a) $z_{E'} = \frac{z_E + 2}{z_E + 1 - 3i} = \frac{-3 + 2i + 2}{-3 + 2i + 1 - 3i} = \frac{-1 + 2i}{-2 - i} = \frac{1 - 2i}{2 + i} = \frac{(1 - 2i)(2 - i)}{(2 + i)(2 - i)} = \frac{2 - 4i - i - 2}{4 + 1} = \frac{-5i}{5} = -i$

$\boxed{z_{E'} = -i}$

b) M invariant par $f \Leftrightarrow M' = M \Leftrightarrow z = \frac{z+2}{z+1-3i} \Leftrightarrow z^2 + z - 3iz = z + 2 \Leftrightarrow z^2 - 3iz - 2 = 0$

$\Leftrightarrow (x + iy)^2 - 3i(x + iy) - 2 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + 2ixy - y^2 - 3ix + 3y - 2 = 0$

En posant $z = x + iy$

$\Leftrightarrow x^2 - y^2 + 3y - 2 + i(2xy - 3x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 + 3y - 2 = 0 \\ 2xy - 3x = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 + 3y - 2 = 0 \\ x(2y - 3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -y^2 + 3y - 2 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x^2 - \frac{9}{4} + \frac{9}{2} - 2 = 0 \\ y = \frac{3}{2} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \text{ ou } y = 2 \\ x = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x^2 = -\frac{1}{4} \\ y = \frac{3}{2} \end{cases} \text{ (impossible) } \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases}$

Il y a donc 2 points invariants par f : D d'afixe i et K d'afixe $2i$.

3°) $M \in \mathcal{E} \Leftrightarrow M'$ appartienne au cercle de centre O et de rayon 1 $\Leftrightarrow |z'| = 1 \Leftrightarrow \left| \frac{z+2}{z+1-3i} \right| = 1 \Leftrightarrow \frac{|z+2|}{|z+1-3i|} = 1$

$\Leftrightarrow |z+2| = |z+1-3i|$ et $z \neq -1 + 3i \Leftrightarrow |z-b| = |z-a|$ et $z \neq a \Leftrightarrow BM = AM$ et $M \neq A$

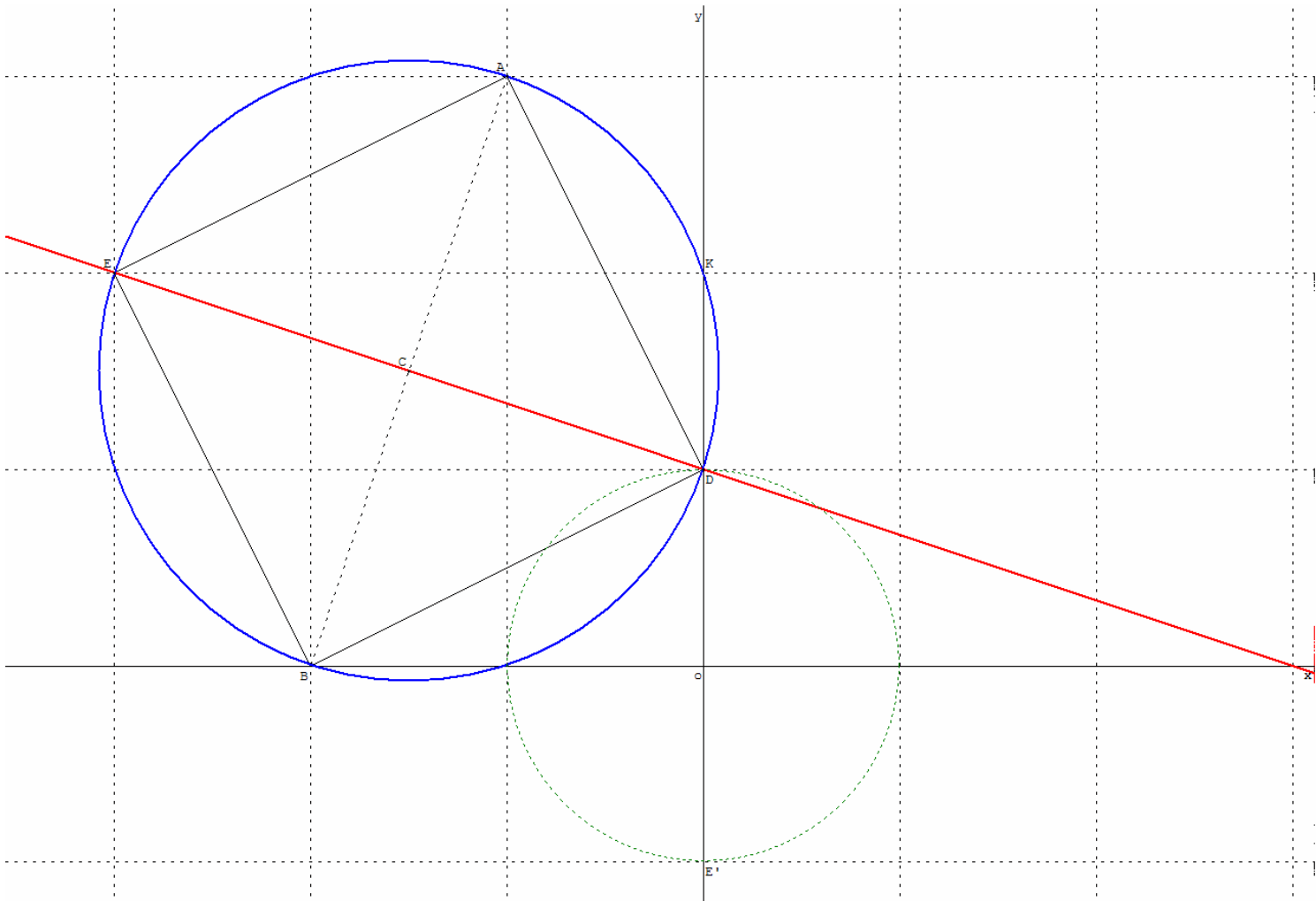
$\mathcal{E}$ est la médiatrice de [AB]

$$\begin{aligned}
4^\circ) \text{ a) } \frac{-z-2}{z+1-3i} &= \frac{\bar{z}+2}{\bar{z}+1+3i} \Leftrightarrow (-z-2)(\bar{z}+1+3i) = (\bar{z}+2)(z+1-3i) \\
&\Leftrightarrow -z\bar{z} - z - 3iz - 2\bar{z} - 2 - 6i = z\bar{z} + \bar{z} - 3i\bar{z} + 2z + 2 - 6i \\
&\Leftrightarrow 2z\bar{z} + 3(z + \bar{z}) + 3i(z - \bar{z}) + 4 = 0 \\
(z-c)(\overline{z-c}) &= \frac{5}{2} \Leftrightarrow (z-c)(\bar{z}-\bar{c}) = \frac{5}{2} \Leftrightarrow z\bar{z} - c\bar{z} - \bar{c}z + c\bar{c} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow 2z\bar{z} - 2c\bar{z} - 2\bar{c}z + 2c\bar{c} = 5 \\
&\Leftrightarrow 2z\bar{z} - (-3+3i)\bar{z} - (-3-3i)z + 9 = 5 \text{ car } c\bar{c} = |c|^2 \\
&\Leftrightarrow 2z\bar{z} + 3\bar{z} - 3i\bar{z} + 3z + 3iz + 4 = 0 \Leftrightarrow 2z\bar{z} + 3(z + \bar{z}) + 3i(z - \bar{z}) + 4 = 0.
\end{aligned}$$

Donc
$$\boxed{\frac{-z-2}{z+1-3i} = \frac{\bar{z}+2}{\bar{z}+1+3i} \Leftrightarrow (z-c)(\overline{z-c}) = \frac{5}{2}}.$$

$$\begin{aligned}
\text{b) } M \in \mathcal{F} &\Leftrightarrow z' \text{ imaginaire pur} \Leftrightarrow \bar{z}' = -z' \Leftrightarrow \overline{\left(\frac{z+2}{z+1-3i}\right)} = -\frac{z+2}{z+1-3i} \Leftrightarrow \frac{\overline{z+2}}{\overline{z+1-3i}} = \frac{-z-2}{z+1-3i} \\
&\Leftrightarrow \frac{-z-2}{z+1-3i} = \frac{\bar{z}+2}{\bar{z}+1+3i} \Leftrightarrow (z-c)(\overline{z-c}) = \frac{5}{2} \text{ et } z \neq -1+3i \text{ d'après c).} \\
&\Leftrightarrow |z-c|^2 = \frac{5}{2} \quad z \neq -1+3i \text{ car } Z\bar{Z} = |Z|^2 \\
&\Leftrightarrow CM = \frac{\sqrt{5}}{2} \text{ et } M \neq A
\end{aligned}$$

$\mathcal{F}$ est un cercle de centre C privé de A ; Ce cercle passe par D (car D' = D a une affixe imaginaire pur)



EXERCICE II - roc (3 points)

Pré-requis :

- la fonction logarithme népérien est dérivable sur $] 0 ; +\infty [$
et sa fonction dérivée est la fonction inverse ($x \mapsto \frac{1}{x}$).
- $\ln(1) = 0$.

*Rappel : une ROC utilise **uniquement les prérequis** et aucune autre connaissance sur la notion !*

1. Démontrer que pour tous réels a et x strictement positifs, $\ln(ax) = \ln(a) + \ln(x)$.

Cette démonstration utilisera les prérequis et les théorèmes suivants :

- dérivée d'une fonction composée
- primitives d'une fonction sur un intervalle.

Un réel $a > 0$ étant fixé introduire la fonction
$$\begin{aligned} \phi :]0, +\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow \ln(ax) \end{aligned}$$

Dériver $\phi : \forall x > 0, \phi'(x) = \frac{a}{x} \times a$ (dérivée d'une composée) donc $\forall x > 0, \phi'(x) = \frac{1}{x}$

D'après le pré-requis 1, il existe une constante C telle que $\forall x > 0, \phi(x) = \ln x + C$ puisque ϕ est une primitive de la fonction inverse sur $]0, +\infty[$

On détermine cette constante en calculant $\phi(1)$ de deux façons :

$$\phi(1) = \ln 1 + C = 0 + C = C \text{ (pré-requis 2)}$$

$$\phi(1) = \ln(a \times 1) = \ln a \text{ (définition de } \phi)$$

Ainsi $C = \ln a$ et on conclut que, $\forall x \in \mathbb{R} : \ln(ax) = \ln x + \ln a$

2. Utiliser le résultat précédent pour démontrer que, pour tout $b > 0$: $\ln \frac{1}{b} = -\ln b$.

$$a) \forall b > 0 : b \times \frac{1}{b} = 1 \text{ donc } \ln(b \times \frac{1}{b}) = \ln 1$$

$$\Leftrightarrow \ln(b) + \ln(\frac{1}{b}) = \ln 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \ln(\frac{1}{b}) = -\ln(b)$$

b) Montrer aussi que $\ln(\frac{a}{b}) = \ln a - \ln b$ Même technique, en écrivant $a = \frac{a}{b} \times b$

3. On donne $0,69 \leq \ln 2 \leq 0,70$ et $1,09 \leq \ln 3 \leq 1,10$. En déduire des encadrements de :

a) $\ln 6$:

$$0,69 \leq \ln 2 \leq 0,70$$

$$1,09 \leq \ln 3 \leq 1,10 \text{ Par somme membre à membre :}$$

$$0,69 + 1,09 \leq \ln 2 + \ln 3 \leq 0,70 + 1,10$$

$$\mathbf{1,78 \leq \ln 6 \leq 1,80}$$

b) $\ln(\frac{1}{6})$: on sait que $\ln(\frac{1}{6}) = -\ln 6$ donc en multipliant chaque terme de la double inégalité par -1

$$\text{(ce qui change le sens) il vient : } \mathbf{-1,80 \leq \ln(\frac{1}{6}) \leq -1,78}$$

c) $\ln(\frac{3}{8})$: on écrit $\frac{3}{8} = \frac{3}{2^3}$ donc $\ln(\frac{3}{8}) = \ln 3 - \ln 2^3 = \ln 3 - 3 \ln 2$

$$1,09 \leq \ln 3 \leq 1,10 \text{ et } -3 \times 0,70 \leq -3 \ln 2 \leq -3 \times 0,69 \text{ d'où par somme :}$$

$$1,09 - 3 \times 0,70 \leq \ln 3 - 3 \ln 2 \leq 1,10 - 3 \times 0,69$$

$$\mathbf{-1,01 \leq \ln(\frac{3}{8}) \leq -0,97}$$

EXERCICE III (4 points)

$U_0 = 4$; $V_0 = 0$; Pour tout entier naturel n : $U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n - \frac{1}{4}V_n$ et $V_{n+1} = U_n + \frac{1}{2}V_n$.

a)

n	1	2	3
U_n	2	0	-1
V_n	4	4	2

b) La suite (U_n) est-elle arithmétique ? Est-elle géométrique ?

La suite n'est pas arithmétique car les différences consécutives ne sont pas constantes :

$$U_1 - U_0 = -2 \text{ puis } U_2 - U_1 = -2 \text{ et } U_3 - U_2 = -1$$

Elle n'est pas, non plus, géométrique car les quotients successifs ne sont pas constants :

$$\frac{U_1}{U_0} = \frac{1}{2} \quad \frac{U_2}{U_1} = 0 \text{ et } \frac{U_3}{U_2} \text{ est impossible car } U_2 = 0$$

2. On considère la suite complexe $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $a_n = U_n + \frac{i}{2}V_n$.

a) Démontrer que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison $q = \frac{1+i}{2}$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = U_{n+1} + \frac{i}{2}V_{n+1} = \frac{1}{2}U_n - \frac{1}{4}V_n + \frac{i}{2} \times (U_n + \frac{1}{2}V_n) = (\frac{1}{2} + \frac{i}{2}) \times U_n + \frac{i}{2} \times \frac{1}{2}V_n + \frac{i}{2} \times \frac{i}{2}V_n$$

$$a_{n+1} = (\frac{1}{2} + \frac{i}{2}) \times (U_n + \frac{i}{2}V_n) = (\frac{1}{2} + \frac{i}{2}) \times a_n$$

ce qui montre que (a_n) est une **suite géométrique de raison $(\frac{1}{2} + \frac{i}{2})$**

b) Ecrire q sous forme exponentielle :

$$\left| \frac{1+i}{2} \right| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\arg(\frac{1+i}{2}) = \theta \text{ avec } \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ et } \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{d'où } \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{Ainsi } q = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\pi/4}$$

c) D'après le cours, on sait que $a_n = a_0 \times q^n$ (formule étendue aux suites à raison $q \in \mathbb{C}$)

$$\text{On calcule } a_0 = U_0 + \frac{i}{2}V_0 = 4$$

$$\text{Ceci permet ici d'écrire : } a_n = 4 \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\pi/4} \right)^n = \frac{4}{(\sqrt{2})^n} \times e^{in\pi/4}$$

d) Puisque U_n est la partie réelle de a_n , on en déduit que pour tout n :

$$U_n = 4 \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^n \times \cos \left(\frac{n\pi}{4} \right)$$

e) Enfin, la limite de (U_n) :

Encadrer (classique !) le cosinus entre -1 et 1 donne un encadrement du terme général U_n entre deux suites

$$\text{de limite nulle : } -4 \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^n \text{ et } 4 \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^n$$

Ainsi par le théorème des gendarmes : **la suite (U_n) est convergente et de limite 0.**

EXERCICE IV (5 points) -

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1) a. $a_1 = 39$ $b_1 = 19$ $c_1 = 21$ $a_2 = 399$ $b_2 = 199$ $c_2 = 201$ $a_3 = 3999$ $b_3 = 1999$ $c_3 = 2001$

b. Par définition d'un nombre écrit en base 10, on peut dire de manière évidente que a_n et c_n ont $(n+1)$ chiffres (4×10^n , par ex, s'écrivant avec le chiffre 4 suivi de n zéros)

Comme 10 est congru à 1 modulo 3, on a donc $10^n \equiv 1^n \equiv 1$ modulo 3. Donc a_n est congru à $4 \times 1 - 1 = 3$ modulo 3, ce qui prouve évidemment que cet entier est divisible par 3.

De même, $c_n \equiv 2 \times 1 + 1 \equiv 0$ modulo 3, donc c_n est aussi divisible par 3.

Remarquons que l'on peut aussi effectuer un raisonnement par récurrence sur n .

c. Comme $\sqrt{b_3} \approx 44,7$, on sait que pour montrer que b_3 est premier, il suffit de vérifier que b_3 n'est pas divisible par tous les nombres premiers inférieurs à 45, c'est à dire par 2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29; 31; 37; 41; 43. On le vérifie aisément, ce qui permet d'affirmer que b_3 est premier.

d. Pour tout entier naturel non nul n ,

$$b_n \times c_n = (2 \times 10^n - 1)(2 \times 10^n + 1) = 4 \times 10^{2n} - 1 = a_{2n}$$

On a alors : $a_6 = b_3 \times c_3 = b_3 \times 2001 = 1999 \times (3 \times 23 \times 29)$, ce qui fournit la décomposition en facteurs premiers.

e. Si un nombre d divise à la fois b_n et c_n , alors d divise à la fois b_n et leur différence 2. Réciproquement, si d divise à la fois b_n et 2, alors d divise à la fois b_n et leur somme c_n . La liste des diviseurs communs à b_n et c_n et la liste des diviseurs communs à b_n et 2 est la même. On peut donc dire que $\text{P GCD}(b_n, c_n) = \text{P GCD}(b_n, 2)$. On en déduit que :

$\text{P GCD}(b_n, c_n) = \text{P GCD}(b_n, 2) = 1$, car c_n est impair. On a donc établi que b_n et c_n sont premiers entre eux.

2) a. Comme b_3 et c_3 sont premiers entre eux (question précédente), l'égalité de Bézout prouve l'existence d'au moins une solution à l'équation (E)

b. $c_3 = 2001 = 1999 \times 1 + 2 = b_3 + 2$ et $b_3 = 1999 = 2 \times 999 + 1$.

Donc : $999 c_3 = 999 b_3 + 2 \times 999$

donc : $999 c_3 = 999 b_3 + (b_3 - 1)$, ce qui donne : $1000b_3 - 999c_3 = 1$ d'où la solution particulière de (E): $(1000; -999)$

c. On utilise la technique classique vue en cours. Des égalités :

$$\begin{cases} 1000b_3 - 999c_3 = 1 \\ b_3x + c_3y = 1 \end{cases} \quad \text{on obtient par soustraction : } (1000 - x)b_3 = (999 + y)c_3$$

Donc b_3 divise le produit $(999 + y) c_3$. Comme b_3 est premier avec c_3 , le théorème de Gauss permet d'affirmer que b_3 divise $999 + y$, donc qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que : $999 + y = b_3k \Leftrightarrow y = -999 + 1999k$

On reporte dans l'équation, ce qui permet d'obtenir : $1000 - x = 2001k$ donc $x = 1000 - 2001k$

On vérifie que, réciproquement, si $(x; y) = (1000 - 2001k; -999 + 1999k)$ alors $(x; y)$ est solution de (E)

L'ensemble des solutions de l'équation est donc : $S = \{(1000 - 2001k; -999 + 1999k), k \in \mathbb{Z}\}$

EXERCICE V - QCM (3 points)

Pour chaque question une seule des quatre réponses proposées est exacte. Aucune justification n'est demandée. Chaque bonne réponse rapporte 1 point, chaque réponse fausse enlève 0,5 point, l'absence de réponse vaut 0 point. Si le total des points de l'exercice est négatif, la note est ramenée à 0.

Vous répondrez sur cette annexe en cochant la case correspondant à votre réponse.			
↓			
1.	La fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = \begin{cases} x e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est :	dérivable en 0 de dérivée 1	☐
		dérivable en 0 de dérivée 0	☒
		n'est pas dérivable en 0	☐
		n'est pas continue en 0	☐
2.	Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{1+e^x}$. Alors $f'(0)$ est égal à :	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	☐
		$\frac{1}{2\sqrt{2}}$	☒
3.	Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \ln x + 1$, et C_f sa courbe représentative dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Les coordonnées du point d'intersection de C_f avec l'axe des abscisses sont :	$(-e, 0)$	☐
		$(\frac{1}{e}, 0)$	☒
		$(0, 0)$	☐
		$(e, 0)$	☐

1) La fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = \begin{cases} x e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est dérivable en 0, de dérivée 0.

En effet $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x e^{-\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-\frac{1}{x}} = 0$ par composée et car $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(-\frac{1}{x}\right) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$.

2) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{1+e^x}$. Alors $f'(0)$ est égal à $\frac{1}{2\sqrt{2}}$

3) Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \ln x + 1$, et C_f sa courbe représentative dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Les coordonnées du point d'intersection de C_f avec l'axe des abscisses sont : $(\frac{1}{e}, 0)$

Exercice 4

1. (a) On a $\lim_{x \rightarrow 0} f_n(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty$.

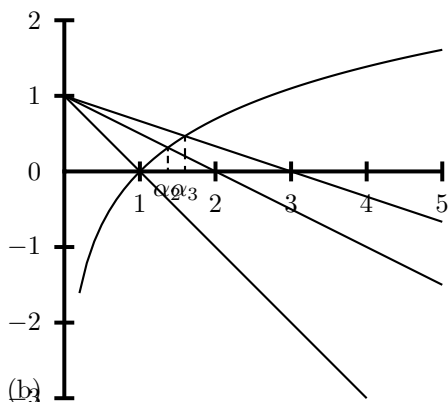
Dérivée : $f'_n(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{n} > 0$ sur $]0; +\infty[$. Les fonctions f_n sont donc strictement croissantes sur $]0; +\infty[$.

- (b) La fonction f_n est continue comme somme de fonctions continues et est strictement croissante sur $]0; +\infty[$: il existe donc au plus un réel $\alpha_n \in]0; +\infty[$ tel que $f_n(\alpha_n) = 0$. L'existence de ce réel est garantie par le TVI et le fait que f_n prend des valeurs positives et négatives sur $]0; +\infty[$ (comme le montre les limites obtenues plus haut).

Comme $f_n(1) = \frac{1}{n} - 1 < 0$ et $f_n(e) = 1 + \frac{e}{n} - 1 = \frac{e}{n} > 0$, on en déduit que $1 < \alpha_n < e$.

2. (a) L'équation est de la forme : $y = ax + 1$. $B_n \in \Delta_n$ d'où $0 = a \times n + 1$, soit $a = -\frac{1}{n}$. On a donc :

$$M(x; y) \in \Delta_n \iff y = -\frac{1}{n}x + 1$$



- (b)
- (c) L'abscisse x du point commun à Γ et Δ_n vérifie $\ln x = -\frac{1}{n}x + 1$, c'est à dire $\ln x + \frac{1}{n}x - 1 = 0$ ou encore $f_n(x) = 0$. Donc $x = \alpha_n$.
- (d) α_1 est la solution de $\ln x + x - 1 = 0$ qui a pour solution évidente $\alpha_1 = 1$ (suggéré aussi par le

croquis).

Toujours d'après le croquis la suite (α_n) semble croissante.

3. (a) On a $\ln \alpha_n + \frac{\alpha_n}{n} - 1 = 0$ (définition de α_n).
D'où $\ln \alpha_n = 1 - \frac{\alpha_n}{n}$.

$$(b) f_{n+1}(\alpha_n) = \ln \alpha_n + \frac{\alpha_n}{n+1} - 1 = 1 - \frac{\alpha_n}{n} + \frac{\alpha_n}{n+1} - 1 = \frac{\alpha_n}{n+1} - \frac{\alpha_n}{n} = \frac{n - \alpha_n - 1}{n(n+1)} \alpha_n = -\frac{\alpha_n}{n(n+1)} < 0.$$

- (c) $f_{n+1}(\alpha_{n+1}) = 0$ et $f_{n+1}(\alpha_n) < 0$ donc $f_{n+1}(\alpha_{n+1}) > f_{n+1}(\alpha_n)$. Or f_{n+1} est strictement croissante sur $]0; +\infty[$, il en résulte que $\alpha_n < \alpha_{n+1}$. La suite (α_n) est donc strictement croissante.

- (d) La suite (α_n) est croissante et majorée par e : elle est donc convergente vers un réel $\ell \leq e$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(\alpha_n) = 0$, d'où

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(\alpha_n) = 0$$

Et $f_n(x) = \ln(x) + \frac{x}{n} - 1$, donc

$$0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(\alpha_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(\alpha_n) + \frac{\alpha_n}{n} - 1$$

Comme $1 < \alpha_n < e$, on a $\frac{1}{n} < \frac{\alpha_n}{n} < \frac{e}{n}$. Avec le thm des gendarmes, on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\alpha_n}{n} = 0$.

On a donc :

$$0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(\alpha_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(\alpha_n) - 1$$

et avec la continuité de $\ln$:

$$0 = \ln(\ell) - 1$$

$$\text{Et : } \ln \ell - 1 = 0 \iff \ln \ell = 1 \iff \boxed{\ell = e}$$