TS - MATH - TYPE BAC

Durée : 4 heures - ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE Calculatrice autorisée.

A rendre avec la copie.

NOM - Prénom : Classe :

Exercice I - QCM (2 points) BAC S – Antilles – sept 2004 - court

Pour chaque question une seule des quatre réponses proposées est exacte. Aucune justification n'est demandée. Chaque bonne réponse rapporte 1 point, chaque réponse fausse enlève 0,5 point, l'absence de réponse vaut 0 point. Si le total des points de l'exercice est négatif, la note est ramenée à 0.

1. La probabilité pour un individu d'une population d'être atteint d'une maladie M est égale à 0,003.

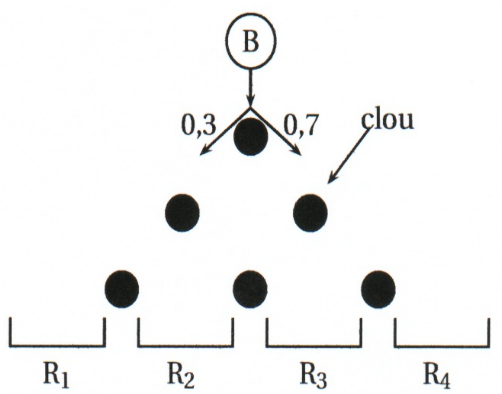
Un test de dépistage, pour cette maladie, a été réalisé ; avec ce test, on peut dire que :

- si une personne est atteinte de la maladie M, le test est positif dans 50 % des cas;
- le test est positif pour 3 % des personnes saines.

Quelle est à 0,01 près la probabilité d'avoir la maladie M lorsque le test est positif ?

❑ 0,95 ❑ 0,9 ❑ 0,15 ❑ 0,05

2. On considère une planche à clous de ce type



On lance une boule B du haut de la planche, elle tombe alors dans l'un des quatre récipients notés R_1, R_2, R_3 et R_4.

À chaque étape, la bille a une probabilité de 0,3 d'aller vers la gauche et 0,7 d'aller vers la droite (*gauche et droite relatives à l'observateur*)

On note p_1 la probabilité que la bille tombe dans le bac R_1 ou dans le bac R_3 ,
et p_2 la probabilité que la bille tombe dans le bac R_2 ou dans le bac R_4 .

Que valent p_1 et p_2 ?

❑ $p_1 = p_2 = 0,5$ ❑ $p_1 = 0,216$ et $p_2 = 0,784$

❑ $p_1 = 0,468$ et $p_2 = 0,532$ ❑ $p_1 = 0,468$ et $p_2 = 0,432$

EXERCICE II (4 points) BAC S - Amérique du Nord - juin 2005

On dispose d'un dé cubique équilibré dont une face porte le numéro 1, deux faces portent le numéro 2 et trois faces portent le numéro 3. On dispose également d'une urne contenant dix boules indiscernables au toucher, portant les lettres L, O, G, A, R, I, T, H, M, E (soit quatre voyelles et six consonnes).

Un joueur fait une partie en deux étapes :
Première étape : il jette le dé et note le numéro obtenu.
Deuxième étape :

- si le dé indique 1, il tire au hasard une boule de l'urne.
  Il gagne la partie si cette boule porte une voyelle et il perd dans le cas contraire.
- si le dé indique 2, il tire au hasard et simultanément deux boules de l'urne.
  Il gagne la partie si chacune de ces deux boules porte une voyelle et il perd dans le cas contraire.
- si le dé indique 3, il tire au hasard et simultanément trois boules de l'urne.
  Il gagne la partie si chacune de ces trois boules porte une voyelle et il perd dans le cas contraire.

A la fin de chaque partie, il remet dans l'urne la ou les boules tirée(s).

On définit les événements suivants :
D_1 : « le dé indique 1 » ; D_2 : « le dé indique 2 » ; D_3 : « le dé indique 3 »; G : «la partie est gagnée ».

A et B étant deux événements tels que $p(A) \neq 0$, on note $p_A(B)$ la probabilité de B sachant que A est réalisé.

1. a. Déterminer les probabilités $p_{D_1}(G)$, $p_{D_2}(G)$, et $p_{D_3}(G)$.

   b. Montrer alors que $p(G) = \dfrac{23}{180}$.

2. Un joueur a gagné la partie. Calculer la probabilité qu'il ait obtenu le numéro 1 avec le dé.

3. a. Un joueur fait six parties.
   Calculer la probabilité qu'il en gagne exactement deux et en donner une valeur arrondie à 10^{-2} près.

   b. Quel nombre minimal de parties un joueur doit-il faire pour que la probabilité d'en gagner au moins une soit supérieure à 0,9 ?

EXERCICE III (3 points) – BAC S - Liban - mai 2003 - extrait

Soit la fonction f définie sur IR par : $f(x) = (2x-5)(1-e^{-x})$.

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$. *On note C la courbe représentative de f.*

1. Démontrer que la droite D d'équation $y = 2x-5$ est asymptote à la courbe C en $+\infty$.
   Préciser la position de C par rapport à D.

2. Pour tout entier naturel $n \geq 3$, on considère les points A_n , B_n et C_n d'abscisse n, appartenant respectivement à l'axe des abscisses, la droite D, et la courbe C ;
   On définit la suite (U_n) par : pour tout entier naturel n, $U_n = \dfrac{C_nB_n}{A_nB_n}$.

   a. Démontrer que, pour tout entier naturel $n \geq 3$, $U_n = \dfrac{2n-5-f(n)}{2n-5}$;

   b. Quelle est la nature de la suite (U_n) ?

   c. Calculer la limite de la suite (U_n).

EXERCICE IV (5 points) BAC S – Nouvelle Calédonie – nov 2004

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère l'application f du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' = z^2 - 4z$.

1. Soient A et B les points d'affixes $z_A = 1 - i$ et $z_B = 3 + i$.
   a. Calculer les affixes des points A' et B' images des points A et B par f.
   b. On suppose que deux points ont la même image par f.
   Démontrer qu'ils sont confondus ou que l'un est l'image de l'autre par une symétrie centrale que l'on précisera.

2. Soit I le point d'affixe –3.
   a. Démontrer que OMIM' est un parallélogramme si et seulement si $z^2 - 3z + 3 = 0$.
   b. Résoudre l'équation : $z^2 - 3z + 3 = 0$.

3. a. Exprimer (z' + 4) en fonction de (z – 2).
   En déduire une relation entre $|z'+4|$ et $|z-2|$ puis entre arg (z' + 4) et arg (z – 2).
   b. On considère les points J et K d'affixes respectives $z_J = 2$ et $z_K = -4$.
   Démontrer que tous les points M du cercle ($\mathcal{C}$) de centre J et de rayon 2 ont leur image M′ sur un même cercle que l'on déterminera.
   c. Soit E le point d'affixe $z_E = -4-3i$.
   Donner la forme trigonométrique de $(z_E + 4)$ et à l'aide du **3. a.** démontrer qu'il existe deux points dont l'image par f est le point E. Préciser sous forme algébrique l'affixe de ces deux points.

EXERCICE V (6 points) – BAC S – Polynesie – sept 2004 - modifié

1. On considère la fonction u définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $u(x) = x^{3/2} - 1 = x\sqrt{x} - 1$.
   Déterminer le signe de $u(x)$ pour tout réel $x > 0$.

2. Soit la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}} + 1 - x$.

   Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$. *On note C la courbe représentative de f.*

   a. Montrer que, pour tout réel $x > 0$, $f\,'(x)$ est du signe de $N(x) = -[2u(x) + \ln x]$.
   b. Calculer $N(1)$ et déterminer le signe de $N(x)$ en distinguant les cas $0 < x < 1$ et $x > 1$.
   c. En déduire le sens de variation de f sur $]0\,;+\infty[$ et les coordonnées du point S de C d'ordonnée maximale. (*On ne demande pas le calcul des limites*)
   d. Déterminer le signe de $f(x)$ pour tout réel $x > 0$.

3. On définit une suite (U_n) par son premier terme U_0 élément de [1,2] , et pour tout n, $U_{n+1} = \dfrac{\ln U_n}{\sqrt{U_n}} + 1$
   a. Démontrer, pour tout réel x élément de [1,2], la double inégalité : $0 \leq \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}} \leq 1$.
   b. Démontrer par récurrence, que pour tout entier naturel n, U_n appartient à [1,2].

4. En remarquant que, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = f(U_n) + U_n$, déterminer le sens de variation de la suite (U_n).

5. a. Montrer que la suite (U_n) est convergente. On note sa limite ℓ.
   b. Déterminer la valeur de ℓ.