CORRIGE

EXERCICE I - QCM (2 points)

1. ❑ 0,95 ❑ 0,9 ❑ 0,15 ☒ 0,05

Notons les événements M : " la personne est atteinte de la maladie M "

T : " le test est positif "

On a $p(M) = 0,003$; $P_M(T) = 0,5$; $P_{\bar{M}}(T) = 0,03$

$$P_T(M) = \frac{P(M \cap T)}{P(T)} = \frac{P_M(T) \times P(M)}{P(T)}$$

or $P(T) = P(T \cap M) + P(T \cap \bar{M})$ (formule proba. totales)

$= P_M(T) \times P(M) + P_{\bar{M}}(T) \times P(\bar{M})$

$= 0,5 \times 0,003 + 0,03 \times 0,997$ car $P(\bar{M}) = 1 - P(M)$

$\simeq 0,03141.$

et finalement $P_T(M) = \dfrac{0,5 \times 0,003}{0,03141} \simeq \boxed{0,0478}$

donc $0,05$ à 10^{-2} près

2. ❑ $p_1 = p_2 = 0,5$ ❑ $p_1 = 0,216$ et $p_2 = 0,784$

☒ $p_1 = 0,468$ et $p_2 = 0,532$ ❑ $p_1 = 0,468$ et $p_2 = 0,432$

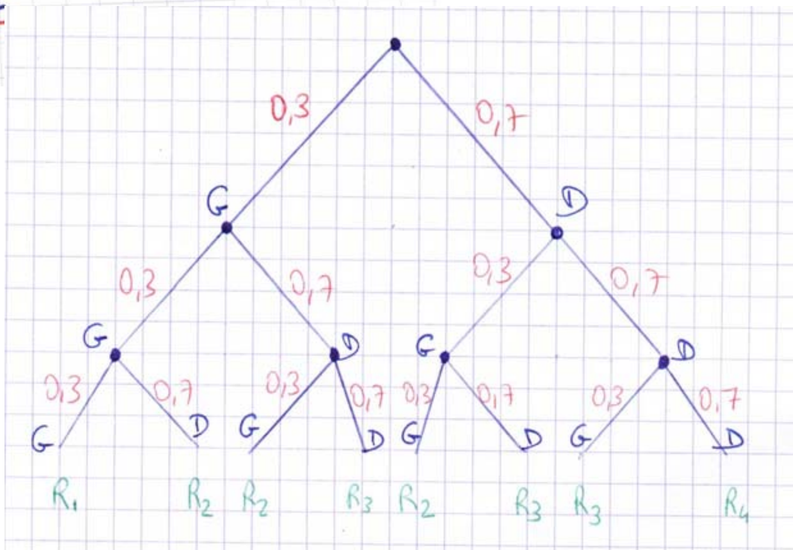
Notons R_i : " la boule tombe dans R_i "

Pour que la boule aille dans R_2, il faut prendre les directions GGD ou GDG ou DGG

$p(R_2) = 3 \times (0,3)^2 \times 0,7 = 0,189$

$p(R_4) = (0,7)^3 = 0,343.$

donc $p_2 = 0,189 + 0,343 = \underline{0,532}$



EXERCICE II (*4 points*)

1°) a) $P_{D_1}(G) = \frac{4}{10} = \boxed{\frac{2}{5}}$ En effet $P(A) = \frac{\text{card}A}{\text{card}\Omega}$ car il y a équiprobabilité

$$P_{D_2}(G) = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{6}{45} = \boxed{\frac{2}{15}}$$

$$P_{D_3}(G) = \frac{\binom{4}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{4}{120} = \boxed{\frac{1}{30}}$$

b) $P(G) = P(G \cap D_1) + P(G \cap D_2) + P(G \cap D_3)$ formule des probabilités totales

$= P_{D_1}(G) \times P(D_1) + P_{D_2}(G) \times P(D_2) + P_{D_3}(G) \times P(D_3)$

$= \frac{2}{5} \times \frac{1}{6} + \frac{2}{15} \times \frac{2}{6} + \frac{1}{30} \times \frac{3}{6}$

$\boxed{P(G) = \frac{23}{180}}$ On pouvait faire un arbre pondéré

2°) $P_G(D_1) = \frac{P(G \cap D_1)}{P(G)} = \frac{P_{D_1}(G) \times P(D_1)}{P(G)} = \frac{\frac{2}{5} \times \frac{1}{6}}{\frac{23}{180}} = \boxed{\frac{12}{23}}$

3°) a) A chaque partie, il y a 2 éventualités :

Soit il gagne (probabilité $p = \frac{23}{180}$)
soit il perd (probabilité $q = 1 - p$)

Il répète six fois cette épreuve de manière identique et ces épreuves sont indépendantes les unes des autres

La variable X égale au nombre de parties gagnées suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 6$ et $p = \frac{23}{180}$

$$P(X = 2) = \binom{6}{2} \left(\frac{23}{180}\right)^2 \left(1 - \frac{23}{180}\right)^4 = 15 \times \frac{23^2 \times 57^4}{180^6}$$

$$\boxed{P(X = 2) \simeq 0{,}142}$$

b) X suit la loi binomiale de paramètres n et $p = \frac{23}{180}$

On cherche alors n minimal tel que :

$P(X \geq 1) > 0{,}9 \iff 1 - P(X < 1) > 0{,}9$ car $P(A) = 1 - P(\bar{A})$

$\iff 1 - P(X = 0) > 0{,}9$ car X ne prend que des valeurs entières de $\mathbb{N}$.

$\iff P(X = 0) < 0{,}1$

$\iff \left(\frac{157}{180}\right)^n < 0{,}1$ car $P(X = k) = \binom{n}{k}\left(\frac{23}{180}\right)^k \left(\frac{57}{180}\right)^{n-k}$

$\iff \ln\left(\frac{157}{180}\right)^n < \ln(0{,}1)$ car $\ln$ strictement croissante

$\iff n \ln\frac{157}{180} < -\ln 10$ car $\ln a^n = n \ln a$ et $\ln \frac{1}{b} = -\ln b$

$\iff n > \frac{-\ln 10}{\ln\frac{157}{180}}$ car $\ln\frac{157}{180} < 0$.

$\iff n > \frac{\ln 10}{\ln\frac{180}{157}}$ soit environ $16{,}8$

Le joueur devra jouer <u>au minimum 17 parties</u> pour que la probabilité de gagner au moins une partie soit supérieure à 0,9.

EXERCICE III (*3 points*)

1°) $f(x) - y_D = (2x-5)(1-e^{-x}) - (2x-5)$
$= (2x-5)(1-e^{-x}-1) = (2x-5)(-e^{-x})$

* $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - y_D] = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(-2\frac{x}{e^x} + 5 \times \frac{1}{e^x}\right) = 0$

car $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$

et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$

D est donc asymptote à C en $+\infty$

* $e^{-x} > 0$ et donc $(-e^{-x}) < 0$

Le signe de $f(x) - y_D$ est le signe contraire de $(2x-5)$

x		$5/2$	
$f(x)-y_D$	$+$	0	$-$
Position	C est au-dessus de D	pt d'intersection	C est au-dessous de D

2°) $A_n(n, 0)$ $B_n(n, 2n-5)$ $C_n(n, f(n))$

$u_n = \frac{C_nB_n}{A_nB_n} = \frac{|y_{B_n} - y_{C_n}|}{|y_{B_n} - y_{A_n}|} = \frac{|2n-5-f(n)|}{|2n-5|}$

or pour tout $x \geq \frac{5}{2}$, $2x-5 \geq f(x)$ d'après 1°)

donc pour $n \geq 3$ $2n-5-f(n) \geq 0$.

donc $|2n-5-f(n)| = 2n-5-f(n)$

De même, $|2n-5| = 2n-5$ car $2n-5 \geq 0$ pour $n \geq 3$

Enfin $\boxed{u_n = \frac{2n-5-f(n)}{2n-5}}$

b) $u_n = \frac{(2n-5)e^{-n}}{2n-5} = e^{-n} = \left(\frac{1}{e}\right)^n$

(u_n) est donc une suite géométrique de raison $\frac{1}{e}$

c) $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$ si $-1 < q < 1$ et on a $\frac{1}{e} \in]0,1[$

donc $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0}$

EXERCICE IV (*5 points*)

1°) a) $z_{A'} = z_A^2 - 4z_A = (1-i)^2 - 4(1-i) = 1 - 2i - 1 - 4 + 4i = \boxed{-4+2i}$

$z_{B'} = z_B^2 - 4z_B = (3+i)^2 - 4(3+i) = 9 + 6i - 1 - 12 - 4i = \boxed{-4+2i}$

b) Soient 2 points M_1 et M_2 d'affixes respectives z_1 et z_2

Supposons $z'_1 = z'_2$

alors $z_1^2 - 4z_1 = z_2^2 - 4z_2$

$z_2^2 - z_1^2 - 4z_2 + 4z_1 = 0$

$(z_2 - z_1)(z_2 + z_1) - 4(z_2 - z_1) = 0$

$(z_2 - z_1)[z_2 + z_1 - 4] = 0$

$z_2 - z_1 = 0$ ou $z_2 + z_1 - 4 = 0$

d'où $z_2 = z_1$ ou $z_2 = -z_1 + 4$

donc $M_2 = M_1$ ou $M_2 = s(M_1)$

où s est la transformation associée à l'expression complexe $z' = -z + 4$.

ou encore $z' = e^{i\pi} z + 4$.

s est donc une rotation d'angle π, ou une homothétie de rapport -1

s est donc bien une symétrie centrale

Cherchons son centre : Il s'agit du point invariant

Or M invariant par $s \iff z' = z \iff -z + 4 = z$
$\iff 2z = 4 \iff z = 2$

Conclusion

Si $M'_1 = M'_2$ alors soit $M_1 = M_2$

soit M_2 est l'image de M_1 par la symétrie centrale de centre $\Omega(2,0)$

2°) a) OMIM' parallélogramme $\Leftrightarrow \overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{MI}$

$\Leftrightarrow Z_{\overrightarrow{OM'}} = Z_{\overrightarrow{MI}}$

$\Leftrightarrow z_{M'} = z_I - z_M$

$\Leftrightarrow z' = -3 - z$

$\Leftrightarrow z^2 - 4z = -3 - z$

$\Leftrightarrow z^2 - 3z + 3 = 0$

b) $z^2 - 3z + 3 = 0$ équation du 2e degré du type $az^2 + bz + c = 0$ avec $a = 1$ $b = -3$ $c = 3$.

$\Delta = b^2 - 4ac = 9 - 4 \times 3 = -3$

$\Delta < 0$ donc 2 solutions complexes conjuguées.

$z_1 = \dfrac{-b + i\sqrt{|\Delta|}}{2a} = \dfrac{3 + i\sqrt{3}}{2} = \dfrac{3}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$z_2 = \overline{z_1} = \dfrac{3}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\boxed{S = \left\{ \dfrac{3}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2} ; \dfrac{3}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2} \right\}}$.

3°) a) $z' + 4 = z^2 - 4z + 4 = (z-2)^2$

$|z' + 4| = |(z-2)^2| = |z-2|^2$

$\arg(z'+4) = \arg(z-2)^2 = 2\arg(z-2)$

b) Soit M un point de $(\mathcal{C})$; alors $JM = 2$

donc $|z_M - z_J| = 2$ soit encore $|z - 2| = 2$

Or $|z' + 4| = |z-2|^2$ donc $|z'+4| = 4$

donc $|z_{M'} - z_K| = 4$ donc $KM' = 4$.

M' est donc sur le cercle $(\mathcal{C}')$ de centre K et de rayon 4.

c) $z_E + 4 = -3i = 3e^{-i\frac{\pi}{2}}$ ($-i$ est le complexe de module 1, d'argument $-\frac{\pi}{2}$)

Cherchons les points M d'affixe z tels que $M' = E$

donc tels que $z' = -4-3i$ ou encore $z'+4 = -3i$

Or d'après 3.a) $\begin{cases} |z-2|^2 = |z'+4| & \text{donc } |z-2|^2 = 3 \\ 2\arg(z-2) = \arg(z'+4) & \text{donc } 2\arg(z-2) = -\frac{\pi}{2}\ (2\pi) \end{cases}$

donc $\begin{cases} |z-2| = \sqrt{3} \\ \arg(z-2) = -\frac{\pi}{4}\ [\pi] \end{cases}$ ⚠ modulo

d'où $z-2 = \sqrt{3}\, e^{-i\frac{\pi}{4}}$ ou $z-2 = \sqrt{3}\, e^{i\frac{3\pi}{4}}$

soit $z = 2 + \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ou $z = 2+\sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$\boxed{z = 2 + \frac{\sqrt{6}}{2} - i\frac{\sqrt{6}}{2}}$ ou $\boxed{z = 2 - \frac{\sqrt{6}}{2} - i\frac{\sqrt{6}}{2}}$.

EXERCICE V (*6 points*)

1) $u(x) = x^{\frac{3}{2}} - 1$

$u(x) \geq 0 \iff x^{3/2} \geq 1 \iff \ln x^{3/2} \geq \ln 1$ car ln st ↗

$\iff \frac{3}{2}\ln x \geq 0 \iff \ln x \geq 0 \iff x \geq 1$

(On pouvait aussi évoquer la stricte monotonie de la fonction $x \longmapsto x^{3/2}$)

x	0		1		$+\infty$
$u(x)$		$-$	0	$+$	

2) $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} + 1 - x$

a) f forme $U+V$ avec $U = \frac{u}{v}$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\sqrt{x} - \ln x \frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} - 1 = \frac{\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}}{x} - 1$$

$$= \frac{2 - \ln x}{2x\sqrt{x}} - 1 = \frac{2 - \ln x - 2x\sqrt{x}}{2x\sqrt{x}}$$

$$f'(x) = \frac{-\ln x + 2(1 - x\sqrt{x})}{2x\sqrt{x}} = \frac{-\ln x - 2u(x)}{2x\sqrt{x}} = \frac{N(x)}{2x\sqrt{x}}$$

Comme $x\sqrt{x} > 0$ $f'(x)$ est du signe de $N(x)$

b) $N(1) = -\ln 1 - 2u(1) = 0$

* Si $x > 1$ alors $\ln x > 0$ et $u(x) > 0$ d'où $2u(x) + \ln x > 0$

donc $N(x) < 0$

* Si $0 < x < 1$ alors $\ln x < 0$, $u(x) < 0$ donc $N(x) > 0$

c)

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
f	$\Vert$	$\nearrow$	0	$\searrow$	

$\boxed{S(1,0)}$

d) f admet un maximum nul donc :

pour tout $x > 0$ $f(x) \leq 0$

3°) a) $x \geq 1$ donc $\ln x \geq 0$ et $\sqrt{x} > 0$ donc $\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}} \geq 0$.

(aucune difficulté)

→ Démontrons que $\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}} \leq 1$ (plusieurs méthodes possibles)

* $1 \leq x \leq 2$ donc $1 \leq \sqrt{x} \leq \sqrt{2}$ donc $\dfrac{1}{\sqrt{2}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{x}} \leq 1$ (1)

$0 \leq \ln x \leq \ln 2$ (2) car $\ln$ s^t $\nearrow$

En multipliant membre à membre (1) et (2),

on obtient $0 \leq \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}} \leq \ln 2$ et $\ln 2 \leq 1$

d'où $\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}} \leq 1$.

* Autre méthode : On pose $g(x) = 1 - \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$

$g(x) = 1 - \left(f(x) - 1 + x\right) = (2 - x) - f(x)$

or $1 \leq x \leq 2$ d'où $2 - x \geq 0$

De plus $f(x) \leq 0$ donc $-f(x) \geq 0$

$\Big\}$ d'où $g(x) \geq 0$

et donc $1 - \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}} \geq 0$

et donc $\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}} \leq 1$.

b) Soit P_n : « $1 \leq u_n \leq 2$ »

* P_0 vraie car $1 \leq u_0 \leq 2$

* Supposons que P_p soit vraie pour un entier naturel p.

Alors $1 \leq u_p \leq 2$

donc $0 \leq \frac{\ln u_p}{\sqrt{u_p}} \leq 1$ d'après a)

d'où $1 \leq \frac{\ln u_p}{\sqrt{u_p}} + 1 \leq 2$ d'où $1 \leq u_{p+1} \leq 2$

P_{p+1} est vraie. La propriété est donc héréditaire

$\boxed{\text{pour } n,\ P_n \text{ est vraie}}$

4°) $u_{n+1} = f(u_n) + u_n$.

$u_{n+1} - u_n = f(u_n)$ donc $u_{n+1} - u_n \leq 0$ car $f \leq 0$.

(u_n) est donc décroissante.

5°) a) (u_n) est décroissante et minorée (par 1)

donc (u_n) est convergente

b) $u_{n+1} - u_n = f(u_n)$ Passons à la limite :

f est continue
(u_n) tend vers ℓ } donc $f(u_n)$ tend vers $f(\ell)$

u_n tend vers ℓ
u_{n+1} tend vers ℓ } $u_{n+1} - u_n$ tend vers 0.

Par unicité de la limite : $0 = f(\ell)$

Or l'unique solution de l'équation $f(x) = 0$ est $x = 1$ d'après l'étude de f.

donc $\boxed{\ell = 1}$.