

TS 5 – Bacc. blanc cassé

Exercice 1 (5 points, pour les élèves suivant le cours de spécialité).

1. On considère l'équation
- $\mathcal{E}$
- :

$$109x - 226y = 1$$

où les inconnues x et y sont des entiers relatifs.

- (a) Déterminer le pgcd de 109 et 226. Que peut-on en déduire pour l'équation $\mathcal{E}$?
 - (b) Montrer que l'ensemble des solutions de $\mathcal{E}$ est l'ensemble des couples de la forme $(-85 + 226k; -41 + 109k)$ où $k \in \mathbb{Z}$.
 - (c) En déduire qu'il existe un unique entier naturel non nul d inférieur ou égal à 226 et un unique entier naturel e tels que $109d = 1 + 226e$ (on précisera les valeurs des entiers d et e).
2. Démontrer que 227 est un nombre premier.
3. On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des 227 entiers naturels a tels que $a \leq 226$.
- (a) Pour tout entier $a \in \mathcal{A}$, on note $f(a)$ le reste de la division euclidienne de a^{109} par 227. Expliquer pourquoi $f(a)$ est un élément de $\mathcal{A}$. Que vaut $f(0)$? Que vaut $f(1)$?
 - (b) Pour tout entier $a \in \mathcal{A}$, on note $g(a)$ le reste de la division euclidienne de a^{141} par 227. Que vaut $g(0)$? Que vaut $g(1)$? Vérifier que $g(f(0)) = 0$ et que $g(f(1)) = 1$.
 - (c) Montrer que pour tout $a \in \mathcal{A}$, $a \neq 0$, on a :

$$a^{226} \equiv 1 \pmod{227}$$

Énoncer le théorème utilisé.

- (d) En utilisant la question 1c, établir la preuve que $g(f(a)) = a$ pour tout $a \in \mathcal{A}$.
4. Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère la surface Σ d'équation :

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{51\,076} z^2$$

- (a) Identifier cette surface Σ .
- (b) Quelle est l'intersection de la surface Σ avec le plan d'équation $x = 0$?
- (c) Parmi les points de cette intersection existe-t-il des points dont les coordonnées sont des entiers naturels appartenant à l'ensemble $\mathcal{A}$ défini à la question 3 ? Si oui, lesquels ?

Exercice 1 (5 points, pour les élèves ne suivant pas le cours de spécialité).Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique : 2 cm).

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$.
2. On pose $a = \sqrt{3} + i$ et $b = \sqrt{3} - i$.
Écrire a et b sous forme exponentielle et placer les points A et B d'affixes respectives a et b .
3. (a) Soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$.
Calculer l'affixe a' du point A' image du point A par r .
Écrire a' sous forme algébrique et placer A' sur la figure précédente.

- (b) Soit h l'homothétie de centre O et de rapport $-\frac{3}{2}$.

Calculer l'abscisse b' du point B' image du point B par h (on donnera b' sous sa forme algébrique).
Placer B' sur la figure précédente.

4. Soit C le centre du cercle $\mathcal{C}$ circonscrit au triangle $OA'B'$ et R le rayon de ce cercle.
On désigne par c l'abscisse du point C .

- (a) Justifier les égalités suivantes :

$$\mathcal{E}_a : c\bar{c} = R^2$$

$$\mathcal{E}_b : (c - 2i)(\bar{c} + 2i) = R^2$$

$$\mathcal{E}_c : \left(c + \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i\right) \left(\bar{c} + \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i\right) = R^2$$

- (b) En déduire :

$$c - \bar{c} = 2i$$

puis :

$$c + \bar{c} = -\frac{4\sqrt{3}}{3}$$

- (c) En déduire l'abscisse du point C et la valeur de R .

Exercice 2 (7 points).

Dans tout le problème, le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 5 cm).

Partie A

On considère la fonction f_1 définie sur $[0; +\infty[$ par

$$f_1(x) = xe^{-x^2}$$

et on appelle $\mathcal{C}_1$ sa courbe représentative.

1. Calculer la limite de f_1 en $+\infty$. Interpréter graphiquement ce résultat.
2. Étudier les variations de f_1 .
3. On appelle Δ la droite d'équation $y = x$.
Déterminer la position de $\mathcal{C}_1$ par rapport à Δ .
4. Tracer $\mathcal{C}_1$ et Δ .

Partie B

On désigne par n un entier naturel non nul et on considère la fonction f_n définie sur $[0; +\infty[$ par

$$f_n(x) = x^n e^{-x^2}.$$

On note $\mathcal{C}_n$ la courbe représentative de f dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, f_n admet un maximum pour $x = \sqrt{\frac{n}{2}}$. On note α_n ce maximum.
2. On appelle S_n le point de $\mathcal{C}_n$ d'abscisse $\sqrt{\frac{n}{2}}$.
Placer S_1 , S_2 sur la figure.
3. Montrer que, pour tout n , $\mathcal{C}_n$ passe par S_2 .

4. Soit la fonction g définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$g(x) = \exp \left(-\frac{x}{2} \left[1 - \ln \left(\frac{x}{2} \right) \right] \right)$$

(a) Étudier les variations de g .

(b) Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, on a :

$$\alpha_n = g(n)$$

(c) En déduire que tout point S_n a une ordonnée supérieure à celle de S_2 .

Exercice 3 (4 points).

Un récipient contient un gaz constitué de deux sortes de particules : 75 % de particules A et 25 % de particules B.

Les particules sont projetées sur une cible formée de deux compartiments K_1 et K_2 .

L'expérience est modélisée de la façon suivante :

- une particule au hasard parmi les particules de type A entre dans K_1 avec la probabilité $\frac{1}{3}$ et dans K_2 avec la probabilité $\frac{2}{3}$;
- une particule au hasard parmi les particules de type B entre dans chacun des compartiments avec la probabilité $\frac{1}{2}$.

Partie A

1. Soit une particule au hasard.

Déterminer la probabilité de chacun des événements suivants :

A_1 : « la particule isolée est de type A et elle entre dans K_1 »,

A_2 : « la particule isolée est de type A et elle entre dans K_2 »,

B_1 : « la particule isolée est de type B et elle entre dans K_1 »,

B_2 : « la particule isolée est de type B et elle entre dans K_2 »,

C_1 : « la particule entre dans K_1 »,

C_2 : « la particule entre dans K_2 ».

2. On procède cinq fois de suite et de façon indépendante à l'épreuve décrite en introduction.

Le nombre de particules étant très grand, on admettra que les proportions 75 % et 25 % restent constantes.

Calculer la probabilité de l'évènement E : « il y a exactement deux particules dans K_2 ».

Partie B

Un récipient contient le gaz décrit précédemment. Les particules A sont radioactives et se transforment spontanément : chaque particule A donne en se transformant une particule B.

On note $p(t)$ la proportion de particules A dans le gaz. Ainsi, à l'instant $t = 0$, on a $p(0) = 0,75$.

Plus généralement, si t est exprimé en années, on a $p(t) = 0,75e^{-\lambda t}$, où λ est une constante réelle.

La demi-vie (temps au bout duquel le nombre de particules restantes est la moitié du nombre initial) des particules de type A est égale à 5 730 ans.

1. Calculer λ (on prendra une valeur approchée décimale à 10^{-5} près par défaut).
2. Déterminer la valeur de t pour laquelle il y aura autant de particules de type A que de particules de type B (on arrondira à l'unité).

Exercice 4 (4 points).

L'objet de l'exercice est l'étude de deux modèles de croissance des racines d'un plan de haricot.

Le temps t est exprimé en jours et la longueur L des racines en millimètres.

Les résultats expérimentaux sont donnés dans le tableau suivant :

t	0	2	4	6	8	9	10
L	1	4	37	59	80	82	83

Partie A

On suppose que la fonction de croissance à l'instant t est proportionnelle à la longueur de la racine (ici $f(t)$) et que dans le cas considéré le coefficient de proportionnalité est 0,9.

La fonction f est donc solution de l'équation différentielle $y' = 0,9y$.

1. Sachant que $f(0) = 1$, déterminer la fonction f .
2. Représenter dans un repère les points de coordonnées $(t; L)$ du tableau et la fonction f .

Partie B

Le modèle précédent ne pouvant s'appliquer que sur une courte période, on définit un autre modèle dans lequel la fonction de croissance vérifie l'équation différentielle $\mathcal{E}_1$:

$$y' = 0,9y - \frac{0,9}{85}y^2$$

On note $\mathcal{E}_2$ l'équation différentielle :

$$y' + 0,9y = \frac{0,9}{85}$$

1. Soit g une fonction dérivable et strictement positive sur $[0; +\infty[$. Montrer que :

$$g \text{ est solution de } \mathcal{E}_1 \iff \frac{1}{g} \text{ est solution de } \mathcal{E}_2$$

2. En déduire la solution g de $\mathcal{E}_1$ telle que $g(0) = \frac{85}{86}$.
3. Étudier les variations de g .
4. Déterminer $\lim_{+\infty} g$.
5. Représenter g sur le graphique de la partie A.