Mathématiques - Terminales S - Mars 2008

Exercice 1 (élèves ne suivant pas la spécialité, 5 points)

Pour chaque question, une seule des trois propositions est exacte. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.
Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct d'origine O.

1. Une solution de l'équation $2|z|+\overline{z}=4+\sqrt{3}-\mathrm{i}$ est :
   (a) $-\sqrt{3}+\mathrm{i}$
   (b) $\sqrt{3}+\mathrm{i}$
   (c) $\sqrt{3}-\mathrm{i}$
2. Soit z un nombre complexe. $|\mathrm{i}\,z+1|$ est égal à :
   (a) $|z|+1$
   (b) $|-\overline{z}-\mathrm{i}|$
   (c) $\sqrt{(1-y)^2-x^2}$
   (où $x=\mathrm{Re}(z)$ et $y=\mathrm{Im}(z)$)
3. Soit z un nombre complexe non nul d'argument θ. Un argument de $\dfrac{1}{-\overline{z}}\times(1+\mathrm{i})$ est :
   (a) $\dfrac{-3\pi}{4}+\theta$
   (b) $\dfrac{\pi}{4}+\theta$
   (c) $\dfrac{\pi}{4}-\theta$
4. Soit $j=\dfrac{-1}{2}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
   Les termes de la suite $\left(j^n\right)\ldots$
   (a) prennent une infinité de valeurs distinctes
   (b) prennent exactement quatre valeurs distinctes
   (c) prennent une infinité de fois la valeur 1
5. Soit A un point d'affixe -2. L'ensemble des points M d'affixe z vérifiant $|z|=|z+2|$ est :
   (a) la droite (OA)
   (b) une droite perpendiculaire à (OA)
   (c) un cercle
6. L'ensemble des points M d'affixe z vérifiant $|z+1-\mathrm{i}|=|3\sqrt{3}+3\mathrm{i}|$ a pour équation :
   (a) $z=-1+\mathrm{i}+36\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, $\theta\in\mathbb{R}$
   (b) $z=1-\mathrm{i}+6\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, $\theta\in\mathbb{R}$
   (c) $z=-1+\mathrm{i}+6\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, $\theta\in\mathbb{R}$
7. La transformation du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z'=\mathrm{i}\,z+2$ est :
   (a) une rotation dont le centre a pour affixe $1+i$
   (b) une homothétie
   (c) une rotation dont le centre a pour affixe 2
8. Trois points A, B, C du plan sont tels que $\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\dfrac{1}{2}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. On peut affirmer :
   (a) que le triangle ABC est équilatéral.
   (b) que A, B, C sont alignés.
   (c) que le triangle ABC est rectangle en A.
9. Soit P la fonction définie sur $\mathbb{C}$ par :
   $$P(z)=z^2+b\,z+1$$
   (où b est un nombre réel). On sait que $(b-2)\,(b+2)\in\,]0;+\infty[$. Dans ce cas :
   (a) L'équation $P(z)=0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{C}$.
   (b) L'équation $P(z)=0$ a deux solutions dans $\mathbb{C}$.
   (c) On ne peut pas savoir.
10. Soit θ un réel. La forme exponentielle du complexe $z=-5\Big(\sin(\theta)-\mathrm{i}\cos(\theta)\Big)$ est :
   (a) $5\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}$
   (b) $5\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\pi)}$
   (c) $5\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$

Exercice 1 (élèves suivant la spécialité, 5 points)

Pour chacune des cinq propositions ci-dessous, vous indiquerez si elle est vraie ou fausse en justifiant votre réponse. *Une réponse non justifiée ne rapportera aucun point.*

1. Pour deux entiers naturels a et b, s'il existe des entiers relatifs u et v tels que $a\,u + b\,v = 7$ alors $\text{pgcd}\,(a;b) = 7$.
2. Si un entier naturel n est congru à 7 modulo 31 alors $\text{pgcd}\,(4\,n+3;2\,n+17) = 31$.
3. Pour tout entier naturel n, le reste dans la division de $25^{5\,n+1}$ par 11 est 3.
4. L'ensemble des solutions de l'équation $5\,x + 3\,y = 2$ (d'inconnue $(x;y) \in \mathbb{Z}^2$) est l'ensemble des couples de la forme $(4+6\,k;-6-10\,k)$, k décrivant $\mathbb{Z}$.
5. Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct, soit f la transformation qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = (1-\text{i})\ z+3-2\text{i}$ et soit g la transformation qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = (1+\text{i})\ z - \dfrac{5}{2} - \dfrac{\text{i}}{2}$.
   La transformation $f \circ g$ est une homothétie.

Exercice 2 (commun à tous les candidats, 5 points)

L'objectif de cet exercice est de déterminer la limite de $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ *lorsque n tend vers* $+\infty$.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \text{e}^x - x - 1$$

1. Démontrer que l'on a $f \geqslant 0$ sur $\mathbb{R}$ (indication : on pourra étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$ et calculer $f(0)$).
2. Déduire de la question précédente que pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a :
$$(\mathscr{I}_1) \quad \exp\left(\frac{1}{n}\right) \geqslant 1 + \frac{1}{n}$$
$$(\mathscr{I}_2) \quad \exp\left(\frac{-1}{n+1}\right) \geqslant 1 - \frac{1}{n+1}$$
3. (a) Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Étudier les variations de la fonction g définie sur $[0;+\infty[$ par $g(x) = x^m$.

   (b) En utilisant l'inégalité $\mathscr{I}_1$, démontrer que pour tout entier naturel non nul n, on a :
$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leqslant \text{e}$$
4. En utilisant l'inégalité $\mathscr{I}_2$, démontrer que pour tout entier naturel non nul n, on a :
$$\text{e}^{-1} \geqslant \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}$$
   et en déduire :
$$\text{e} \leqslant \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$
5. Déduire des questions précédentes que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on a :
$$\frac{n\text{e}}{n+1} \leqslant \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leqslant \text{e}$$
6. En déduire
$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Exercice 3 (commun à tous les candidats, 4 points)

Le but de l'exercice est l'étude de la dynamique d'une population d'oeufs et de larves de certains insectes en fonction du temps.

A l'instant t ($t \in [0;+\infty[$), le nombre d'oeufs vivants pondus est approximativement donné par :

$$N(t) = N_0\,\mathrm{e}^{-0,3\,t}$$

où N_0 désigne le nombre initial d'oeufs pondus au moment de la ponte, c'est à dire à l'instant $t = 0$. Dans la suite, on prendra $N_0 = 1\,000$.

1. Dresser le tableau des variations de la fonction N sur $[0;+\infty[$, en indiquant les limites aux bornes.
2. Dans cette question, a désigne un réel strictement positif.
   (a) Calculer (en fonction de a) l'intégrale $I(a)$ définie par :
   $$I(a) = \int_0^a 1\,000\,\mathrm{e}^{-0,3\,t}\,\mathrm{d}t$$
   (b) Pour $a \in \mathbb{R}$, on pose :
   $$J(a) = \int_0^a 0,3\,t\,\mathrm{e}^{-0,3\,t}\,\mathrm{d}t$$
   A l'aide d'une intégration par parties, établir que l'on a :
   $$J(a) = -a\,\mathrm{e}^{-0,3\,a} - \frac{10}{3}\,\mathrm{e}^{-0,3\,a} + \frac{10}{3}$$
   (c) La durée de vie moyenne d'un oeuf est le nombre réel $E = \lim\limits_{a\to+\infty} J(a)$. Déterminer ce nombre. On admettra pour ce calcul le résultat suivant :
   $$\lim_{x\to+\infty} x\mathrm{e}^{-x} = 0$$
3. La fonction L qui donne, à l'instant t, le nombre de larves vivantes est solution dans $[0;+\infty[$ de l'équation différentielle
   $$L' = 0,5\,N - 0,2\,L$$
   soit

   $\mathscr{E}$: Pour tout $t \in [0;+\infty[$, $L'(t) + 0,2\,L(t) = 500\,\mathrm{e}^{-0,3\,t}$

   (a) Résoudre l'équation différentielle (d'inconnue la fonction L) :
   $$L' + 0,2\,L = 0$$
   (b) Déterminer le réel K tel que la fonction L_1 définie sur $[0;+\infty[$ par
   $$L_1(t) = K\,\mathrm{e}^{-0,3\,t}$$
   soit solution de $\mathscr{E}$.

Exercice 4 (commun à tous les candidats, 6 points)

Partie A

On considère la suite (w_n) définie par :

$$\begin{cases} w_0 = 32 \\ \text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ w_{n+1} = \dfrac{2\,w_n - 1}{w_n + 4} \end{cases}$$

1. Établir que la suite (t_n) définie pour $n \in \mathbb{N}$ par :

$$t_n = \frac{1}{w_n + 1}$$

est arithmétique de raison $\frac{1}{3}$.

2. En déduire que pour $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$w_n = \frac{33}{11\,n + 1} - 1$$

3. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $]-6;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{7\,x + 6}{x + 6}$$

et (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \text{pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

1. Étudier les variations de f.

2. Des approximations des premiers termes de la suite (u_n) ont été calculés dans une feuille de tableur :

A	B
indice n	terme u(n)
0	1,00000
1	1,85714
2	2,41818
3	2,72354
4	2,87324
5	2,94286
6	2,97444
7	2,98861
8	2,99493
9	2,99775
10	2,99900
11	2,99955
12	2,99980
13	2,99991
14	2,99996
15	2,99998
16	2,99999
17	3,00000
18	3,00000

Quelles conjectures peut-on émettre sur la monotonie et la convergence de cette suite ?

3. Résoudre l'équation $f(x) = x$ (d'inconnue x).

4. Démontrer que pour tout réel $x \in [0;3]$, on a $f(x) \in [0;3]$.

5. Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n, on a $u_n \in [0;3]$.

6. Soit (v_n) une suite définie par son premier terme v_0 et pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ par

$$v_n = g(v_{n-1})$$

où g est une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}$. On suppose que $v_0 > v_1$. Montrer que la suite v est dans ce cas une suite strictement décroissante à partir du rang 0.

7. Étudier la monotonie de la suite (u_n).

8. Démontrer que la suite (u_n) est convergente.

9. Déterminer la limite ℓ de la suite (u_n).