Correction du baccalauréat blanc février 2009 TS épreuve de mathématique

Exercice 1 ***(5 points) Commun à tous les candidats*** *Amérique du nord juin 2007*

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$ (unité graphique : 4 cm).

Soit A le point d'affixe $z_A = i$ et B le point d'affixe $z_B = e^{-i\frac{5\pi}{6}}$.

1. Soit *r* la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$. On appelle C l'image de B par *r*.

a. **E**criture complexe de *r*. $z' = e^{i\frac{2\pi}{3}} z$ $\quad z' = \left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) z$

b. **A**ffixe de C : $z_C = e^{\frac{2i\pi}{3}} \times e^{\frac{-5i\pi}{6}} = e^{\frac{-i\pi}{6}}$.

c. **F**orme algébrique de z_B et z_C. $z_B = e^{-i\frac{5\pi}{6}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$ et $z_C = e^{-i\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

d. Placer les points A, B et C.

2. Soit D le barycentre des points A, B et C affectés respectivement des coefficients 2, – 1 et 2.

a. **A**ffixe de D : $3z_D = (2z_A - z_B + 2z_C)$ d'où $z_D = \frac{1}{3}(2z_A - z_B + 2z_C) = \ldots\ldots = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = e^{i\frac{\pi}{6}}$

b. A, B, C et D points cocycliques. $z_A = e^{i\frac{\pi}{2}}$; $z_B = e^{-i\frac{5\pi}{6}}$, $z_C = e^{\frac{-i\pi}{6}}$. $z_D = e^{i\frac{\pi}{6}}$ complexes de modules 1

Donc les 4 points sont sur le même cercle de centre O et de rayon 1 (cercle trigonométrique)

3. Soit *h* l'homothétie de centre A et de rapport 2. On appelle E l'image de D par *h*.

a. **E**criture complexe de *h*. $z' - z_A = 2(z - z_A)$ $\quad z' = 2z - z_A = 2z - i$

b. **A**ffixe de E : $z_E = 2z_D - i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) - i = \sqrt{3}$. Construction du point E.

4. a. $\frac{z_D - z_C}{z_E - z_C} = \ldots\ldots = \frac{i}{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i} = \ldots\ldots = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{\pi}{3}}$. On utilise la méthode du conjugué ou directement les écritures exponentielles.

b. **N**ature du triangle CDE.

$$\frac{z_D - z_C}{z_E - z_C} = e^{i\frac{\pi}{3}} \Leftrightarrow \begin{cases} \left|\frac{z_D - z_C}{z_E - z_C}\right| = 1 \\ \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_E - z_C}\right) = \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |z_D - z_C| = |z_E - z_C| \\ \left(\overrightarrow{CE}, \overrightarrow{CD}\right) = \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} CD = CE \\ \left(\overrightarrow{CE}, \overrightarrow{CD}\right) = \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ le triangle CED est équilatéral

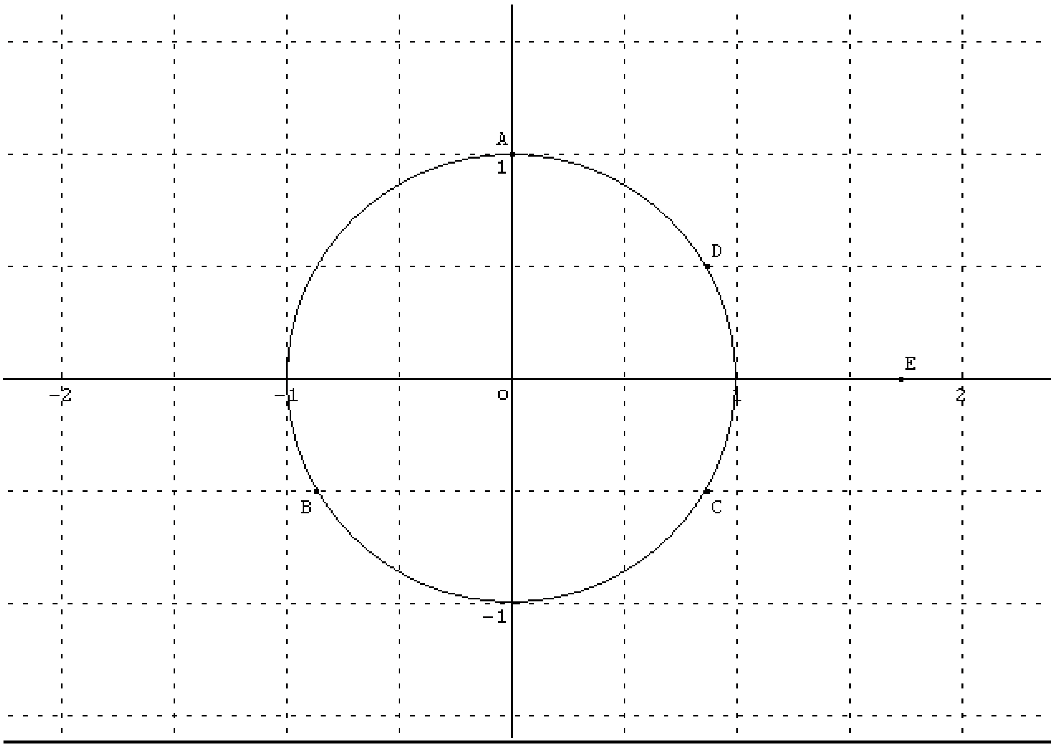
Conclusion : le triangle CED est équilatéral

Autre méthode plus « dynamique » avec des rotations :

$$\frac{z_D - z_C}{z_E - z_C} = e^{i\frac{\pi}{3}} \Leftrightarrow z_D - z_C = e^{i\frac{\pi}{3}}(z_E - z_C)$$

$\Leftrightarrow$ D est l'image de E par la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{3}$

$\Leftrightarrow$ ***Conclusion : le triangle CED est équilatéral***


A
1
D
E
-2
-1
O
1
2
B
C
-1

<u>Exercice 2</u> (*5 points*) ***Réservé aux candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité de mathématiques*** Antilles sept 2008 en parties

Soit f la fonction définie sur ℝ par : $f(x)=x+2-\dfrac{4e^x}{e^x+3}$. *On remarque que pour tout réel x* e^x *+ 3 >0 donc le domaine est bien* ℝ

On désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.

1. a. Limite de *f* en – ∞ . $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-4e^x}{e^x+3}=0$; donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x+2=-\infty$

b. Asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-(x+2)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-4e^x}{e^x+3}=0$

Donc la droite $\mathscr{D}_1$ d'équation y = x + 2 est asymptote oblique à la courbe $\mathscr{C}$

c. Position relative de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}_1$.

Etude du signe de $f(x)-(x+2)$ c'est-à- dire du signe de $\dfrac{-4e^x}{e^x+3}$

Or pour tout réel x , e^x >0, donc e^x + 3>0 et $\dfrac{-4e^x}{e^x+3}<0$ **.**

Conclusion : La courbe $\mathscr{C}$ est toujours au dessous de $\mathscr{D}_1$

2. a. Calcul de *f'*

$$f'(x)=1-\frac{4e^x(e^x+3)-4e^x\times e^x}{(e^x+3)^2}=\ldots\ldots=\frac{e^{2x}-6e^x+9}{(e^x+3)^2}=\left(\frac{e^x-3}{e^x+3}\right)^2$$

b. Variations de *f* sur ℝ

En tant que carré f '(x) est positif ou nul :

strictement positif sur ℝ privé de ln 3 et s'annule pour x = ln 3 qui est la seule solution de l'équation e^x – 3 = 0

Tableau de variations de la fonction *f* .

x	- ∞	ln 3	+ ∞
f '(x)	+	0	+
f(x)	↗	ln 3	↗

f ' est strictement positif sur R sauf en ln 3 où f ' s'annule ;
donc f est strictement croissante sur R

f (ln 3) = ln 3

3. a. Tangente $\mathscr{D}_2$ à la courbe $\mathscr{C}$ au point I d'abscisse ln3 le point I a pour coordonnées I (ln 3 ; ln 3)

$\mathscr{D}_2$ a pour coefficient directeur le nombre dérivé f '(ln3) = 0 ; c'est donc une droite parallèle à l'axe des abscisses

son équation est : y = ln 3

b. Position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à $\mathscr{D}_2$. Etude du signe de f(x) – ln3

Or f est croissante sur R (observation du tableau de variation de f)

si x > ln 3 alors f(x) > f(ln 3) ⇔ f(x) > ln 3 la courbe $\mathscr{C}$ est au dessus de $\mathscr{D}_2$

si x < ln 3 alors f(x) < f(ln 3) ⇔ f(x) < ln 3 la courbe $\mathscr{C}$ est au dessous de $\mathscr{D}_2$

4. a. Tangente $\mathscr{D}_3$ à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0

la tangente $\mathscr{D}_3$ à la courbe au point d'abscisse 0 sa pour équation : $y=f'(0)(x-0)+f(0)$ or f '(0) = $\dfrac{1}{4}$ et f(0) = 1 on obtient $y=\dfrac{1}{4}x+1$

b. Position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la tangente $\mathscr{D}_3$ sur l'intervalle]– ∞ ; ln3].

Etude du signe de $f(x)-(\dfrac{1}{4}x+1)$

Soit g la fonction définie sur R par g(x) = $f(x)-(\dfrac{1}{4}x+1)$ .Pour étudier son signe, on étudie sa variation :

$g'(x)=f'(x)-\dfrac{1}{4}$ et

$$g''(x)=f''(x)=2\left(\frac{e^x-3}{e^x+3}\right)\times\frac{e^x(e^x+3)-(e^x-3)e^x}{\left(e^x+3\right)^2}=2\left(\frac{e^x-3}{e^x+3}\right)\times\frac{e^{2x}+3e^x-(e^{2x}-3e^x)}{\left(e^x+3\right)^2}=2\left(\frac{e^x-3}{e^x+3}\right)\times\frac{6e^x}{\left(e^x+3\right)^2}=\frac{12\,e^x(e^x-3)}{(e^x+3)^3}$$

x	$-\infty$		0		ln 3		$+\infty$
e^x		+		+		+	
$e^x - 3$		−		−	0	+	
$\left(e^x+3\right)^3$		+		+		+	
g''(x)		−		−	0	+	
g'(x)		↘	0	↘	$-\frac{1}{4}$	↗	
Signe de g'(x)		+	0	−		Hors domaine d'étude	
Variation de g		↗	0	↘		Hors domaine d'étude	
Signe de g		−	0	−		Hors domaine d'étude	

$e^x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \ln 3$

$e^x + 3$ toujours strictement positif

e^x toujours strictement positif

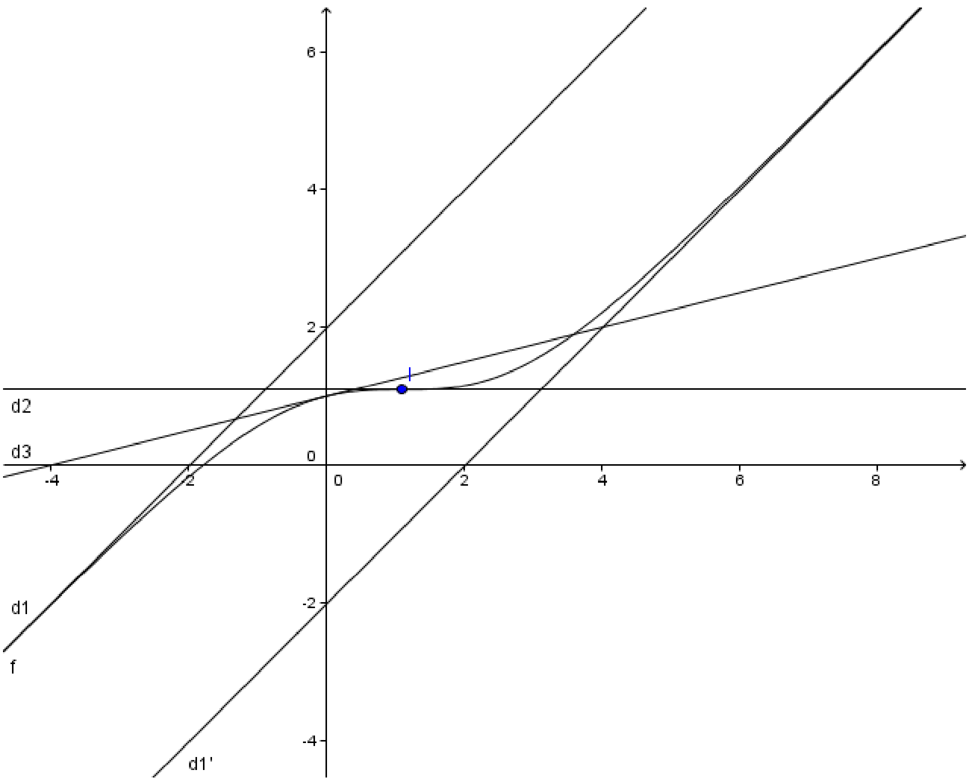
g'(ln 3)= $-\frac{1}{4}$

g'(0) = 0

g (0) = 0

La courbe $\mathscr{C}$ est donc toujours en dessous de la tangente $\mathscr{D}_3$ sauf bien sûr au point (0 ; 1) où $\mathscr{D}_3$ est tangente à $\mathscr{C}$

5. On admet que le point I est centre de symétrie de la courbe $\mathscr{C}$.



__**Exercice 3**__ : (*5 points*) **Commun à tous les candidats** Amérique du Sud nov 2006

1. Pour tout entier naturel n non nul, on considère la fonction f_n définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $f_n(x)=\ln x+\dfrac{x}{n}-1$

a. Limite de f_n en 0 $\lim\limits_{x\to 0}\ln(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{n}=0$ donc par somme $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}f(x)=-\infty}$

Limite de f_n en $+\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{n}=+\infty$ car n est un entier positif donc par somme $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty}$

Dérivée : $f_n\,'(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{n}$ qui est pour tout réel x de $]0\,;+\infty[$ strictement positif

Tableau de variation :

x	**0**		$+\infty$
f '(x)	+	+	
f(x)	$-\infty$ $\nearrow$		∞

b. Equation $f_n(x)=0$ Théorème des valeurs intermédiaires

la fonction fn est définie et continue sur $]0\,;+\infty[$, l'intervalle image est $]-\infty\,;+\infty[$. 0 appartient à cet intervalle image ; donc l'équation $f_n(x)=0$ admet dans $]0\,;+\infty[$ une unique solution α_n ;

$f_n(1)=\dfrac{1}{n}-1$ est strictement négatif

$f_n(e)=\dfrac{e}{n}$ est strictement positif donc $\boxed{1<\alpha_n<e}$

2. Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$. On note Γ la courbe représentative de la fonction logarithme népérien.

a. Soit n un entier naturel non nul.

Equation de la droite Δ_n passant par le point A de coordonnées (0 ; 1) et le point B_n de coordonnées (n ; 0).

Grâce au point A , on obtient l'ordonnée à l'origine égale à 1 d'où l'équation du type : y = ax + 1

Le point B_n (n ; 0) est un point de Δ_n donc $0=a\times n+1$ $a=-\dfrac{1}{n}$ d'où l'équation de Δ_n : $\boxed{y=-\dfrac{1}{n}x+1}$

b. Tracer les droites Δ_1 , Δ_2 et Δ_3 sur la figure représentant la courbe Γ ,

Δ_1 : $y=-x+1$ Δ_2 : $y=-\dfrac{1}{2}x+1$ Δ_3 : $y=-\dfrac{1}{3}x+1$

c. Point d'intersection de Γ avec Δ_n .

$$M\in\Gamma\cap\Delta_n \Leftrightarrow \begin{cases} y=\ln(x) \\ y=-\dfrac{1}{n}x+1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=\ln(x) \\ \ln(x)=-\dfrac{1}{n}x+1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=\ln(x) \\ f(x)=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=\ln(x) \\ x=\alpha_n \end{cases}$$

Conclusion : α_n est l'abscisse du point d'intersection entre Γ avec Δ_n .

d. Valeur de α_1

On sait que l'équation $f_1(x) = 0$ admet dans $]0\,;+\infty[$ une unique solution α_1 ; or $f_1(1) = \ln 1+\frac{1}{1}-1=0$; donc 1 est aussi solution de l'équation $f_1(x) = 0$ dans $]0\,;+\infty[$. Du fait de l'unicité, on en déduit que $\alpha_1 = 1$

Graphiquement, on conjecture que la suite $(\alpha_n)_{n>0}$ est croissante.

3. a. $\ln(\alpha_n)$ **en fonction de *n* et de** α_n **.**

On a $f_n(\alpha_n) = 0 \Leftrightarrow \ln(\alpha_n)+\frac{\alpha_n}{n}-1=0$ Donc $\ln(\alpha_n)=1-\frac{\alpha_n}{n}$

b. $f_{n+1}(\alpha_n)$ **en fonction de *n* et de** α_n

$f_{n+1}(\alpha_n)=\ln(\alpha_n)+\frac{\alpha_n}{n+1}-1=\left(1-\frac{\alpha_n}{n}\right)+\frac{\alpha_n}{n+1}-1$ du fait que $\ln(\alpha_n)=1-\frac{\alpha_n}{n}$

$f_{n+1}(\alpha_n)=\alpha_n\left(-\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)=\alpha_n\left(\frac{-1}{n(n+1)}\right)$ or $\alpha_n \in]1;e[$ donc α_n est strictement positif, n et n +1 sont strictement positifs

Conclusion : $f_{n+1}(\alpha_n) < 0$

c. Sens de variation de la suite (α_n)

On a : f_{n+1} strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$, $f_{n+1}(\alpha_{n+1}) = 0$ et $f_{n+1}(\alpha_n) < 0$ donc $\alpha_n < \alpha_{n+1}$

x	0	α_n	α_{n+1}	$+\infty$
f_{n+1}**(x)**		négatif $\nearrow$	0 $\nearrow$	∞

Conclusion : la suite (α_n) ***est croissante***

. d. Etude de la convergence

La suite (α_n) est croissante et majorée par e ; donc elle est convergente . On note ℓ sa limite.

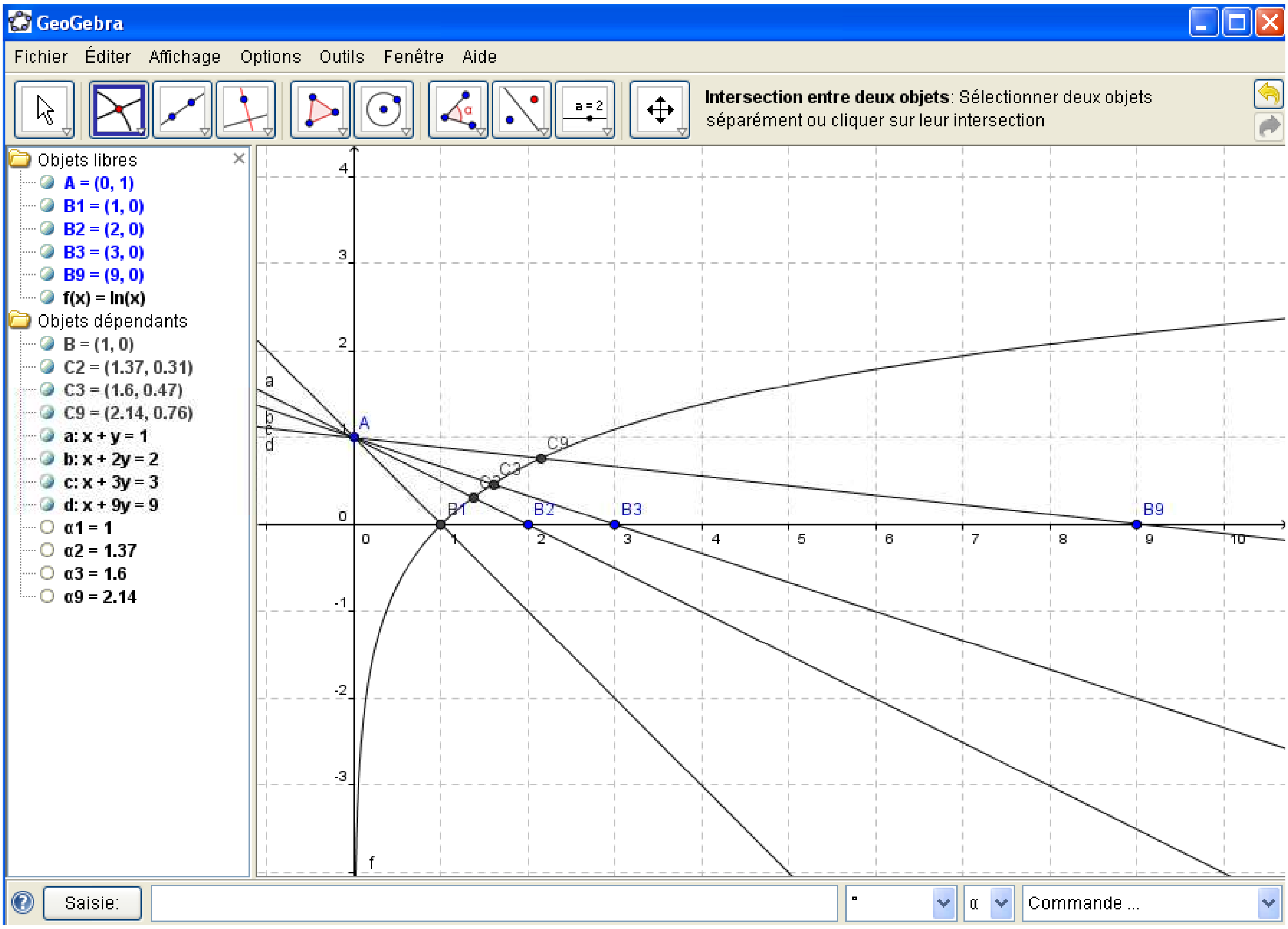
Pour tout n >0 on a : $\ln(\alpha_n)=1-\frac{\alpha_n}{n}$; la suite (α_n) étant convergente et ln étant continue, alors $\ln(\alpha_n)$ admet une limite quand n tend vers $+\infty$ égale à $\ln \ell$.

D'autre part, (α_n) étant convergente vers le réel ℓ ; $\frac{\alpha_n}{n}$ admet une limite égale à 0 quand n tend vers $+\infty$

On a donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(\alpha_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} 1-\frac{\alpha_n}{n}$

Conclusion : ln(ℓ) = 1 et ainsi ℓ = e.

Les abscisses des points d'intersection entre la courbe de la fonction ln et les droites « pivotantes » autour du point fixe A (0 ; 1) et passant par les points de l'axe des abscisses B_n ***(n ; 0) tendent vers le nombre e quand n tend vers*** $+\infty$


GeoGebra
Fichier Éditer Affichage Options Outils Fenêtre Aide
Intersection entre deux objets: Sélectionner deux objets séparément ou cliquer sur leur intersection
Objets libres
A = (0, 1)
B1 = (1, 0)
B2 = (2, 0)
B3 = (3, 0)
B9 = (9, 0)
f(x) = ln(x)
Objets dépendants
B = (1, 0)
C2 = (1.37, 0.31)
C3 = (1.6, 0.47)
C9 = (2.14, 0.76)
a: x + y = 1
b: x + 2y = 2
c: x + 3y = 3
d: x + 9y = 9
α1 = 1
α2 = 1.37
α3 = 1.6
α9 = 2.14
Saisie:
Commande ...

A rendre avec votre copie **Nom :** **prénom :** **classe :**

Exercice 4 : **QCM** ***(5 points)***

Cochez la bonne réponse . Dans chaque cas , une et une seule réponse est exacte .
Le barème de chaque question est indiqué dans la première colonne. Une réponse inexacte enlève la moitié des points ; l'absence de réponse est comptée 0. Si le total est négatif, la note est ramenée à 0 .

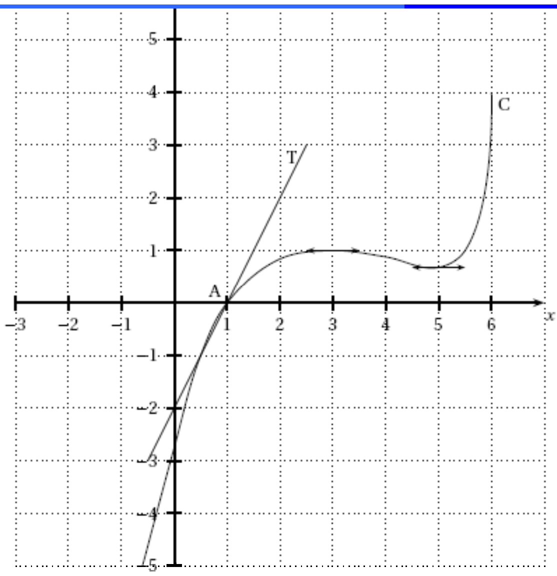
N°	Questions	A	B	C	D
1 1 point	L'équation $e^x - 4e^{-x} - 3 = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ **A :** 0 solution **B :** 1 solution **C :** 2 solutions **D :** plus de 2 solutions		X		
2 0,5 point	Donner le domaine de définition D de la fonction suivante $\frac{x-1}{\ln(x-1)}$ **A :** D =]1; +∞[**B :** D =]0 ; +∞[**C :**]1 ; e[∪]e ; +∞[**D :**]1 ; 2[∪]2 ; +∞[				X
3 1 point	Une solution de l'équation différentielle $y' = -y + e^{2x}$ est : **A :** $f(x) = e^{-x} + e^x$ **B :** $f(x) = e^{-x} - e^{2x}$ **C :** $f(x) = e^{-x} + \frac{1}{3}e^{2x}$ **D :** $f(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$			X	
4 0,5 point	On considère trois suites (u_n) , (v_n) et (w_n) ayant , pour tout entier naturel n, les propriétés suivantes : $u_n \le v_n \le w_n$, $\lim_{n\to+\infty}(u_n) = -1$ et $\lim_{n\to+\infty}(w_n) = 1$ Alors : **A :** $\lim_{n\to+\infty}(v_n) = 0$ **B :** La suite (v_n) est minorée **C :** Pour tout *n* de $\mathbb{N}$, on a $-1 \le v_n \le 1$ **D :** La suite (v_n) est convergente		X		

Dans les questions suivantes, on considère la représentation graphique C de la fonction *f* définie et dérivable sur]– ∞ ; 6].

La fonction dérivée de *f* est notée *f'*.

La droite T est la tangente à C au point d'abscisse 1.

On admet que la courbe C est située sous cette tangente T sur]– ∞ ; 6].



N°	Questions	A	B	C	D
5 0,5 point	L'équation réduite de la tangente T à C au point A d'abscisse 1 est : **A :** y = x – 1 **B :** y = x – 2 **C :** y = 2x + 1 **D :** y = 2 (x – 1)				X
6 0,5 point	L'équation *f* '(*x*) = 0 admet : **A :** 0 solution **B :** 1 solution **C :** 2 solutions **D :** 3 solutions			X	
7 0,5 point	La fonction composé $\ln \circ f$ est définie sur : **A :** $]-\infty ; 6]$ **B :** $]0 ; 6]$ **C :** $[1 ; 6]$ **D :** $]1 ; 6]$				X
8 0,5 point	La fonction $\ln \circ f$ s'annule exactement : **A :** 0 fois **B :** 1 fois **C :** 2 fois **D :** 3 fois			X	

Corrigé exercice de spécialité Bac Blanc TS Février 2009

A- Représentation graphique de quelques ensembles

On se place dans $R_{8,8}$:

a) $x \equiv 2(\bmod 3) \iff x=2$ ou $x=5$ ou $x=8$

$y \equiv 1(\bmod 3) \iff x=1$ ou $x=4$ ou $x=7$

Il y a donc 9 points $M(x,y)$ vérifiant $x \equiv 2(\bmod 3)$ et $y \equiv 1(\bmod 3)$ dans $R_{8,8}$

$(2,1),(2,4),(2,7),(5,1),(5,4),(5,7),(8,1),(8,4),(8,7)$

b) $x+y \equiv 1(\bmod 3) \iff x+y=1+3k, k\in\mathbb{Z} \iff y=-x+1+3k, k\in\mathbb{Z}$

Les points sont donc situés sur des droites parallèles, de coefficient directeur -1, d'ordonnée à l'origine $1+3k, k\in\mathbb{Z}$. Il y a 27 points $M(x,y)$ vérifiant $x+y\equiv 1(\bmod 3)$ dans $R_{8,8}$:

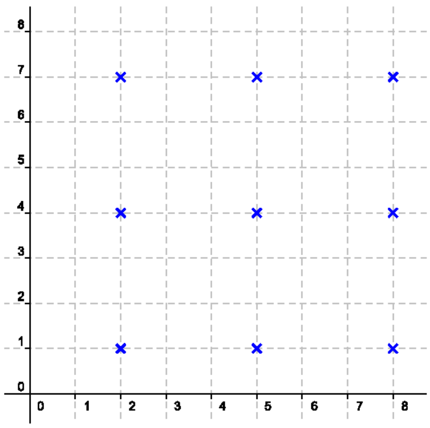
les points du réseau situés sur ces droites parallèles

c) $x \equiv y(\bmod 3) \iff x=y+3k, k\in\mathbb{Z} \iff y=x-3k, k\in\mathbb{Z}$

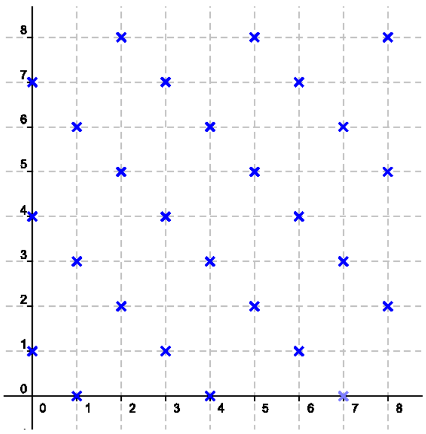
Les points sont donc situés sur des droites parallèles, de coefficient directeur 1, d'ordonnée à l'origine $-3k, k\in\mathbb{Z}$. Il y a 27 points $M(x,y)$ vérifiant $x\equiv y(\bmod 3)$ dans $R_{8,8}$:

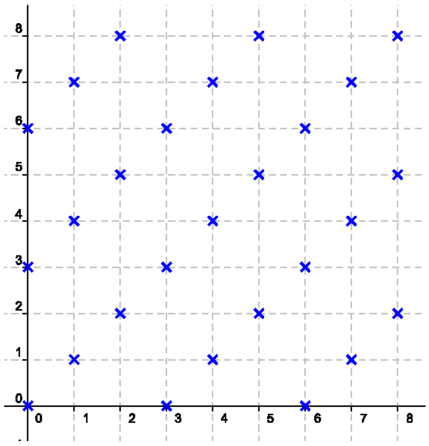
les points du réseau situés sur ces droites parallèles

Graphique 1



Graphique 2





Graphique 3

B- Résolution d'une équation

On considère l'équation (E): $7x-4y=1$, où x et y sont des entiers relatifs

1- PGCD(7,4)=1. 7 et 4 étant premiers entre eux, il existe, d'après le théorème de Bezout, des couples (u,v) d'entiers relatifs tels que $7u+4v=1$

On écrit l'algorithme d'Euclide : $7=4\times1+3$ $\quad$ $4=3\times1+1$

On en déduit : $1=4-3$ donc $1=4-(7-4)=-7+2\times4$

Le couple $(x_0,y_0)=(-1,-2)$ est donc une solution particulière de l'équation (E): $7x-4y=1$

2 – Si (x,y) est solution de (E), on a : $7x-4y=1$

$$7x_0-4y_0=1$$

Par soustraction membre à membre, on obtient donc : $7(x-x_0)-4(y-y_0)=0$

soit : $7(x+1)-4(y+2)=0$

De l'égalité $7(x+1)=4(y+2)$, on déduit : 7 divise $4(y+2)$

7 et 4 étant premiers entre eux, d'après le théorème de Gauss, on en déduit que 7 divise $y+2$

On a donc : $y+2=7k, k\in\mathbb{Z}$

L'égalité $7(x+1)=4(y+2)$ s'écrit : $7(x+1)=4\times 7k$ et on en déduit que : $x+1=4k$

On a donc montré que : si (x,y) est solution, alors $(x,y)=(4k-1,7k-2), k\in\mathbb{Z}$

Réciproquement : si $(x,y)=(4k-1,7k-2), k\in\mathbb{Z}$ alors $7x-4y=7(4k-1)-4(7k-2)=1$

(x,y) est donc solution de (E)

L'ensemble des solutions de (E) est l'ensemble des couples $(x,y)=(4k-1,7k-2), k\in\mathbb{Z}$

$3-$ Le point $M(x,y)$, avec (x,y) solution de (E), appartient au réseau $\mathrm{R}_{4,7}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(x,y)=(4k-1,7k-2), k\in\mathbb{Z}\\ 0\le x\le 4\\ 0\le y\le 7\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x,y)=(4k-1,7k-2), k\in\mathbb{Z}\\ 0\le 4k-1\le 4\\ 0\le 7k-2\le 7\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x,y)=(4k-1,7k-2), k\in\mathbb{Z}\\ \dfrac{1}{4}\le k\le \dfrac{5}{4}\\ \dfrac{2}{7}\le k\le \dfrac{9}{7}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(x,y)=(4k-1,7k-2), k\in\mathbb{Z}\\ \dfrac{2}{7}\le k\le \dfrac{5}{4}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x,y)=(4k-1,7k-2)\\ k=1\end{cases} \Leftrightarrow (x,y)=(3,5)$$

L'équation (E) a une unique solution $(x,y)=(3,5)$ appartenant au réseau $R_{4,7}$

C- Une propriété des points placés sur la diagonale du réseau

Soit $O(0,0), A(a,b)$

$1-$ Le point $M(x,y)$ appartient à $[OA] \Leftrightarrow$ Il existe un réel k tel que : $\overrightarrow{OM}=k\overrightarrow{OA}$ avec $0\le k\le 1$

$\Leftrightarrow$ Il existe un réel k tel que $\begin{cases}x=ka\\ y=kb\end{cases}, 0\le k\le 1$

Les points du segment $[OA]$ sont donc caractérisés par : $0\le x\le a, 0\le y\le b, ay=bx$

$2-$ Le point $O(0,0)$ et le point $A(a,b)$ appartiennent toujours au réseau $R_{a,b}$.

Si l'un seulement des 2 entiers x ou y est nul, il est impossible d'avoir $ax=by$ car a et b sont non nuls.

Envisageons le cas où les deux nombres x et y sont simultanément non nuls.

Si a et b sont premiers entre eux:

a divise bx donc a divise x d'après le th de Gauss.

On sait que: $0\le x\le a$. On en déduit que $x=a$

b divise ay donc b divise y d'après le th de Gauss.

On sait que : $0\le y\le b$. On en déduit que $y=b$

Les deux seuls points du réseau situés sur $[OA]$ sont donc $O(0,0)$ et $A(a,b)$.

$3-$ Si a et b ne sont pas premiers entre eux, on nomme $d=PGCD(a,b), d\ne 1$

On écrit alors : $a=da', b=db', PGCD(a',b')=1$

$ay=bx$ s'écrit : $da'x=db'y$ et en simplifiant par d, $a'x=b'y$

D'après la question 2, les seuls points du réseau $R_{a',b'}$ situés sur $[OA']$ sont $O(0,0)$ et $A'(a',b')$.

Le segment $[OA]$ contient donc au moins un autre point du réseau : A'