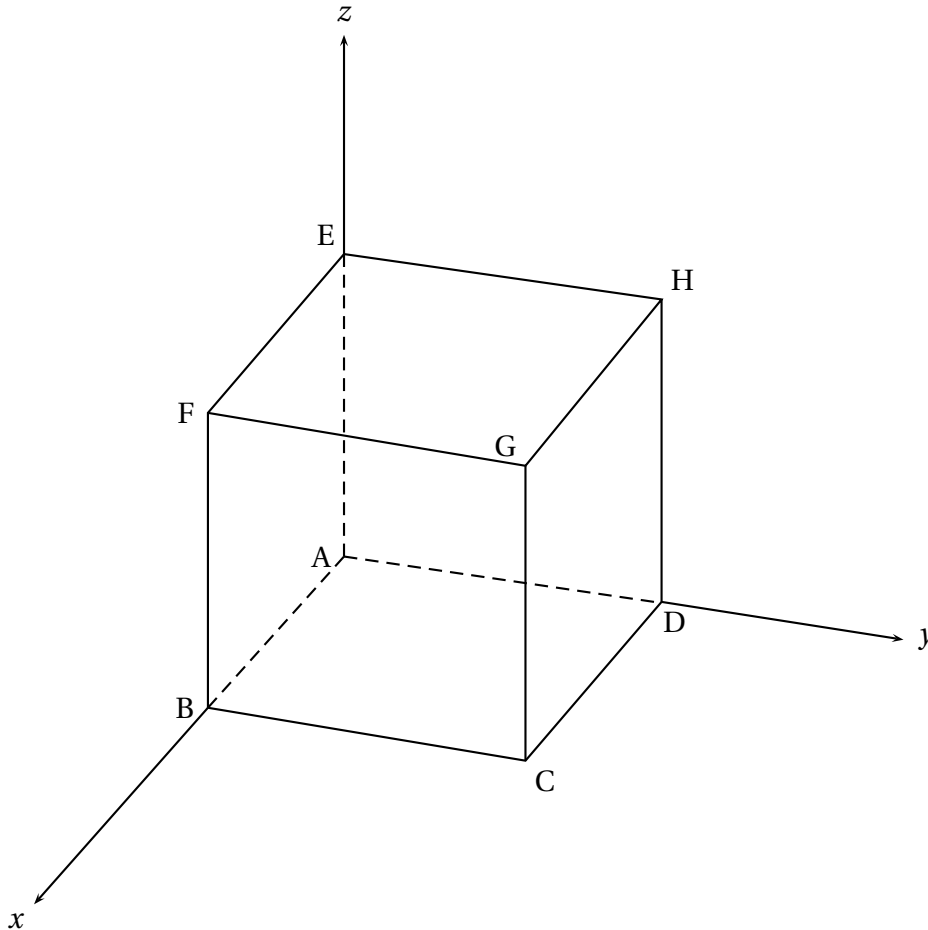


EXERCICE 1

L'espace est rapporté au repère orthonormal $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

On considère le cube ABCDEFGH représenté sur la figure ci-dessous (qu'il faudra compléter et rendre avec la copie).



On désigne par I, J et K les milieux respectifs des segments [BC], [BF] et [HF].

- Déterminer les coordonnées des points I, J et K.
 - Démontrer que le vecteur $\vec{n}(2; 1; 1)$ est orthogonal à $\vec{IK}$ et à $\vec{IJ}$.
En déduire qu'une équation du plan (IJK) est : $4x + 2y + 2z - 5 = 0$.
 - Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite (CD).
 - En déduire que le point d'intersection R du plan (IJK) et de la droite (CD) est le point de coordonnées $\left(\frac{3}{4}; 1; 0\right)$.
 - Placer le point R sur la figure.
 - Tracer sur la figure la section du cube par le plan (IJK). *On peut répondre à cette question sans avoir traité les précédentes.*
-

5. (a) Montrer que la distance du point G au plan (IJK) est $\frac{\sqrt{6}}{4}$.

(b) Soit $\mathcal{S}$ la sphère de centre G passant par F.

Justifier que la sphère $\mathcal{S}$ et le plan (IJK) sont sécants.

Déterminer le rayon de leur intersection.

EXERCICE 2

Partie A – Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x$.

On appelle $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

(a) Soit a un nombre réel. Démontrer que la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point M d'abscisse a coupe l'axe des abscisses au point P d'abscisse $a - 1$.

(b) Soit N le projeté orthogonal du point M sur l'axe des abscisses. Démontrer que $\overrightarrow{NP} = -\vec{i}$.

Partie B – Soit g une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :

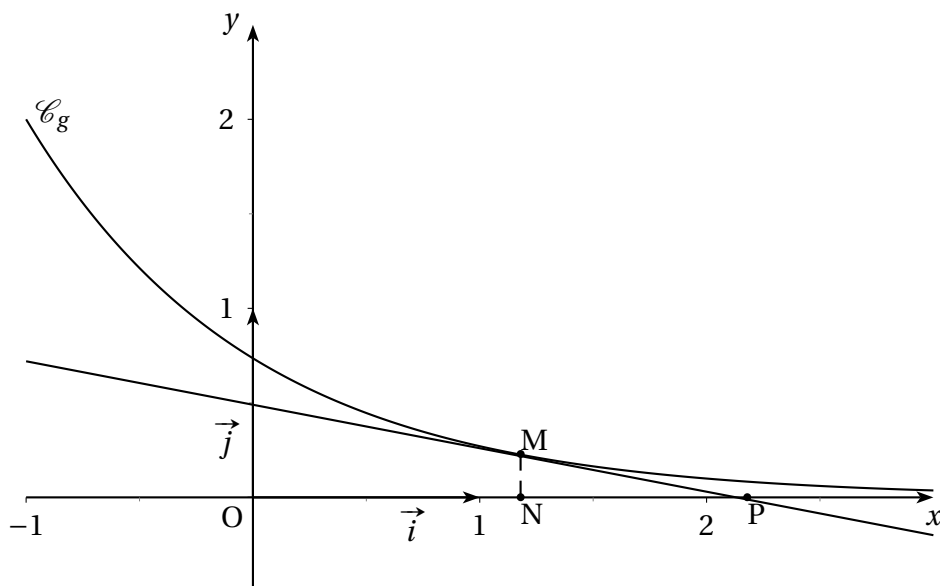
$$\text{pour tout réel } x, \quad g'(x) \neq 0$$

On appelle $\mathcal{C}_g$ la courbe représentative de la fonction g dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Soit a un nombre réel. On considère le point M de la courbe $\mathcal{C}_g$ d'abscisse a et le point N projeté orthogonal du point M sur l'axe des abscisses.

Soit P le point d'intersection de la tangente T_a à la courbe $\mathcal{C}_g$ au point M avec l'axe des abscisses.

Le graphique ci-dessous illustre la situation de cette partie B.



(a) Démontrer que le point P a pour coordonnées $\left(a - \frac{g(a)}{g'(a)}; 0\right)$.

(b) Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Existe-t-il une fonction g vérifiant $g(0) = 2$ et $\overrightarrow{NP} = \vec{i}$?

EXERCICE 3

Le plan complexe $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, unité graphique : 2 cm.
On nomme Γ le cercle de centre O et de rayon 1.

On fera une figure que l'on complétera tout au long de l'exercice.

On nomme F l'application qui, à tout point M d'affixe $z \neq 0$, associe le point $M' = F(M)$ d'affixe z' définie par :

$$z' = z + i - \frac{1}{z}.$$

1. On considère les points A et B d'affixes respectives $a = i$ et $b = e^{i\frac{\pi}{6}}$ et leurs images A' et B' par F d'affixes respectives a' et b' .
 - (a) Calculer a' et b' .
 - (b) Placer les points A, A', B et B'.
 - (c) Démontrer que $\frac{-b}{b' - b} = \frac{\sqrt{3}}{3}i$.
 - (d) En déduire la nature du triangle OBB'.
2. On recherche l'ensemble $\mathcal{E}$ des points du plan $\mathcal{P}$ privé du point O qui ont pour image par F le point O.
 - (a) Démontrer que, pour tout nombre complexe z , on a :

$$z^2 + iz - 1 = \left(z + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) \left(z - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right).$$

- (b) En déduire les affixes des points de l'ensemble $\mathcal{E}$.
 - (c) Démontrer que les points de $\mathcal{E}$ appartiennent à Γ .
3. Soit θ un réel.
 - (a) Démontrer que si $z = e^{i\theta}$ alors $z' = (2 \sin \theta + 1)i$.
 - (b) En déduire que si M appartient au cercle Γ alors M' appartient au segment [A'C] où C a pour affixe $-i$.

EXERCICE 4

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + \cos(x)$.
 - (a) f n'a pas de limite en $+\infty$.
 - (b) f a pour limite $1 + x$ en $+\infty$.
 - (c) f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$.
 - (d) aucune des réponses précédentes n'est valide.
 2. Maximilien affirme : « Une fonction f strictement croissante sur un intervalle $[A; +\infty[$ a pour limite $+\infty$ en $+\infty$. » Laquelle des fonctions ci-après constitue-t-elle un contre-exemple à cette affirmation ?
 - (a) f définie par $f(x) = x + \cos(x)$.
-

-
- (b) f définie par $f(x) = 2x + 1 + \frac{1}{x+1}$.
- (c) f définie par $f(x) = -e^{-x} + 2$.
- (d) Aucune des réponses précédentes ne convient.

3. On sait que la fonction g définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} & \text{pour } x > 0 \\ a & \text{pour } x = 0 \end{cases}$$

est continue sur $[0; +\infty[$. On a :

- (a) $a = 0$
- (b) $a = 0,5$
- (c) $a = 1$
- (d) Aucune des valeurs précédentes ne convient.
4. Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2x+1}$$

On note $g = f'$, $h = g'$ et $k = h'$. La fonction k est donnée sur $[0; +\infty[$ par :

- (a) $k(x) = \frac{-1}{(2x+1)^8}$
- (b) $k(x) = \frac{-48}{(2x+1)^4}$
- (c) $k(x) = \frac{-48}{(2x+1)^8}$
- (d) Aucune des réponses précédentes n'est correcte.
5. La suite (u_n) est géométrique de premier terme u_0 ($u_0 \in \mathbb{R}^*$) et de raison -2 . On peut affirmer :
- (a) la limite de la suite (u_n) est $+\infty$.
- (b) la limite de la suite (u_n) est $-\infty$.
- (c) La limite de la suite (u_n) dépend du signe de u_0 .
- (d) Aucune des réponses précédentes n'est valide.

EXERCICE SPÉ

Soit n un entier naturel non nul.

1. On considère l'équation notée $\mathcal{E}$:

$$3x + 7y = 10^{2n} \text{ où } x \text{ et } y \text{ sont des entiers relatifs.}$$

- (a) Déterminer un couple $(u; v)$ d'entiers relatifs tels que $3u + 7v = 1$.
En déduire une solution particulière $(x_0; y_0)$ de l'équation $\mathcal{E}$.
-

(b) Déterminer l'ensemble des couples d'entiers relatifs $(x ; y)$ solutions de $\mathcal{E}$.

2. On considère l'équation notée $\mathcal{G}$

$$3x^2 + 7y^2 = 10^{2n} \text{ où } x \text{ et } y \text{ sont des entiers relatifs.}$$

(a) En remarquant que $100 \equiv 2 \pmod{7}$, démontrer que si $(x ; y)$ est solution de $\mathcal{G}$ alors $3x^2 \equiv 2^n \pmod{7}$.

(b) Compléter le tableau suivant :

Reste de la division euclidienne de x par 7	0	1	2	3	4	5	6
Reste de la division euclidienne de $3x^2$ par 7.							

(c) Démontrer que 2^n est congru, modulo 7, à 1, 2 ou 4.

(d) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation $\mathcal{G}$.
