TERMINALES SCIENTIFIQUES ~ BB ~ Corrigé

EXERCICE I (5 points)

1. Rappelons que le milieu Z d'un segment [ST] a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}(x_S+x_T); \frac{1}{2}(y_S+y_T); \frac{1}{2}(z_S+z_T)\right)$.
   Comme on a : B(1 ; 0 ; 0), C(1 ; 1 ; 0), F(1 ; 0 ; 1), H(0 ; 1 ; 1),
   on en déduit : $I\left(1\,;\,\frac{1}{2}\,;\,0\right)$, $J\left(1\,;\,0\,;\,\frac{1}{2}\right)$, $K\left(\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\,;\,1\right)$.
2. Rappelons que les coordonnées d'un vecteur $\overrightarrow{ST}$ sont données par : $(x_T-x_S; y_T-y_S; z_T-z_S)$.
   $\overrightarrow{IK}\left(-\frac{1}{2}\,;\,0\,;\,1\right)$ et $\vec{n}\cdot\overrightarrow{IK} = x_{\vec{n}}x_{\overrightarrow{IK}} + y_{\vec{n}}y_{\overrightarrow{IK}} + z_{\vec{n}}z_{\overrightarrow{IK}} = -1+0+1=0$: les vecteurs $\vec{n}$ et $\overrightarrow{IK}$ sont orthogonaux.
   $\overrightarrow{IJ}\left(0\,;\,-\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\right)$ d'où $\vec{n}\cdot\overrightarrow{IJ} = 0-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=0$: les vecteurs $\vec{n}$ et $\overrightarrow{IJ}$ sont orthogonaux.
   Les vecteurs $\overrightarrow{IK}$ et $\overrightarrow{IJ}$ ne sont manifestement pas colinéaires (leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles) : le vecteur $\vec{n}$, orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (IJK), est normal à ce plan.
   Une équation du plan (IJK) est donc :
   $M(x\,;\,y\,;\,z)\in(IJK) \iff 2x+1y+1z+d=0$.
   Comme I appartient à ce plan on a $I\left(1\,;\,\frac{1}{2}\,;\,0\right)\in(IJK) \iff 2+\frac{1}{2}+d=0 \iff d=-\frac{5}{2}$. Donc
   $M(x\,;\,y\,;\,z)\in(IJK) \iff 2x+y+z-\frac{5}{2}=0$
   ou encore (en multipliant par 2 chaque membre de l'égalité) :
   $$M(x\,;\,y\,;\,z)\in(IJK) \iff 4x+2y+2z-5=0.$$
3. (a) $\overrightarrow{DC}(1\,;\,0\,;\,0)$, donc $M(x\,;\,y\,;\,z)\in(CD) \iff$ Il existe un réel α tel que $\overrightarrow{DM}=\alpha\overrightarrow{DC}$ ou encore :
   $$M(x\,;\,y\,;\,z)\in(CD) \iff \text{Il existe un réel } \alpha \text{ tel que } \begin{cases} x-0 &= \alpha\times 1 \\ y-1 &= \alpha\times 0 \\ z-0 &= \alpha\times 0 \end{cases}$$
   D'où une équation paramétrique de la droite (DC) :
   $$\begin{cases} x &= \alpha \\ y &= 1 \\ z &= 0 \end{cases} \qquad \alpha\in\mathbb{R}$$
   (b) Les coordonnées de R vérifient l'équation de (IJK) et l' équation paramétrique de (DC).
   $$\begin{cases} x &= \alpha \\ y &= 1 \\ z &= 0 \\ 4x+2y+2z-5 &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x &= \alpha \\ y &= 1 \\ z &= 0 \\ 4\alpha+2-5 &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x &= \alpha \\ y &= 1 \\ z &= 0 \\ \alpha &= \frac{3}{4} \end{cases}$$
   $$\iff \begin{cases} x &= \frac{3}{4} \\ y &= 1 \\ z &= 0 \\ \alpha &= \frac{3}{4} \end{cases}$$
   Le triplet des coordonnées du point R est donc $\left(\frac{3}{4}\,;\,1\,;\,0\right)$.

(c) figure

4. (a) Les coordonnées de G sont (1 ; 1 ; 1) et distance(G, (IJK)) $= \dfrac{|4+2+2-5|}{\sqrt{4^2+2^2+2^2}} = \dfrac{3}{\sqrt{24}} = \dfrac{3}{2\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{6}}{4}$.

(b) La sphère $\mathscr{S}$ et le plan (IJK) sont sécants si la distance de G au plan (IJK) est inférieure au rayon de la sphère. Ce rayon est égal à GF.
$GF^2 = 0^2 + (-1)^2 + 0^2 = 1 \Rightarrow GF = 1$.
Or $\dfrac{\sqrt{6}}{4} < 1$.
Donc la sphère et le plan sont sécants suivant un cercle de centre O′
et de rayon r tel que (théorème de Pythagore) : $GF^2 = GO'^2 + FO'^2$
Cette dernière égalité s'écrit ici $1^2 = \left(\dfrac{\sqrt{6}}{4}\right)^2 + r^2$.
d'où $r = \dfrac{\sqrt{10}}{4}$.

EXERCICE II (5 points)

PARTIE A

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = e^x$.
L'équation de la tangente au point d'abscisse a est $y - f(a) = f'(a)(x-a)$, c'est à dire : $y - e^a = e^a(x-a)$.

Cette tangente coupe l'axe des abscisses en un point P d'ordonnée 0, on a donc $0 - e^a = e^a(x_P - a)$,
c'est à dire (e^a étant non nul) : $-1 = x_P - a$. D'où $x_P = a - 1$.

2. On a $M\left(a\,;\,e^a\right)$ et $N(a\,;\,0)$.
D'ou $\overrightarrow{NP}(-1\,;\,0)$ ce qui signifie que $\overrightarrow{NP} = -\vec{\imath}$.

PARTIE B

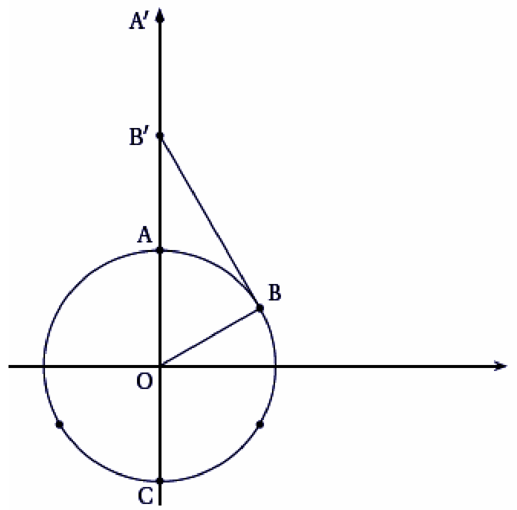
1. L'équation de la tangente est : $y - g(a) = g'(a)(x-a)$. Le point P d'ordonnée nulle est tel que $0 - g(a) = g'(a)(x_P - a)$ d'où $x_P = a - \dfrac{g(a)}{g'(a)}$ (puisque $g'(a) \neq 0$ d'après l'énoncé).

2. On a $P\left(a - \dfrac{g(a)}{g'(a)}\,;\,0\right)$ et $N(a\,;\,0)$, d'où $\overrightarrow{NP}\left(-\dfrac{g(a)}{g'(a)}\,;\,0\right)$.
On a donc l'équivalence suivnate : $\overrightarrow{NP} = \vec{\imath} \iff -\dfrac{g(a)}{g'(a)} = 1 \iff -g(a) = g'(a)$.
La fonction g est une solution de l'équation différentielle $y' = -y$; on sait que les solutions de cette équation sont de la forme $y = Ce^{-x}$. Avec la condition initiale $y(0) = 2$, on obtient $2 = Ce^{-0} \iff C = 2$.

Conclusion.
Il existe une fonction, une seule, vérifiant les deux conditions données : la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2e^{-x}$.

EXERCICE III (5 points)

1. c **2. c** **3. b** **4. b** **5. d**



EXERCICE IV (5 points) - Non spé

1. (a) $a' = i + i - \frac{1}{i} = 2i + i = 3i$;

   $b' = e^{i\frac{\pi}{6}} + i - \frac{1}{e^{i\frac{\pi}{6}}} = e^{i\frac{\pi}{6}} i - e^{-i\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i + i - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = 2i.$

   (b) Cf. figure

   (c) $\frac{-b}{b'-b} = \frac{-e^{i\frac{\pi}{6}}}{2i - e^{i\frac{\pi}{6}}} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i}{2i - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i}{\frac{3}{2}i - \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)\left(-\frac{3}{2}i - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\left(\frac{3}{2}i - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}i - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = \frac{\frac{3}{4} - \frac{3}{4} + \left(\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{4}\right)i}{\frac{3}{4} + \frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{3}i.$

   (d) On sait que $\arg\left(\frac{-b}{b'-b}\right) = \left(\overrightarrow{BB'}, \overrightarrow{BO}\right) = \arg\left(\frac{\sqrt{3}}{3}i\right) = \frac{\pi}{2}$.

   $\left(\overrightarrow{BB'}, \overrightarrow{BO}\right) = \frac{\pi}{2}$ signifie que le triangle OBB′ est rectangle en B.
   On peut aussi préciser que ce triangle n'est pas isocèle puisque :

   $$\frac{BO}{BB'} = \left|\frac{0-b}{b'-b}\right| = \frac{\sqrt{3}}{3} \neq 1.$$

2. (a) $z^2 + iz - 1 = \left(z + \frac{1}{2}i\right)^2 + \frac{1}{4} - 1 = \left(z + \frac{1}{2}i\right)^2 - \frac{3}{4} = \left(z + \frac{1}{2}i + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(z + \frac{1}{2}i - \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$

   On peut aussi bien sûr développer le membre de droite pour obtenir le membre de gauche.

   (b) On cherche les points M tels que F(M) = O, c'est à dire tels que $z + i + \frac{1}{z} = 0$, ce qui équivaut à : $\frac{z^2 + iz + 1}{z} = 0$ ou encore à : $z^2 + iz + 1 = 0$.
   Avec la question précédente :

   $$F(M) = O \iff \left\{\begin{array}{lcl} z + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i & = & 0 \\ & \text{ou} & \\ z - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} z & = & -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \\ & \text{ou} & \\ z & = & \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \end{array}\right.$$

   Ces deux complexes $-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$ et $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$ sont les affixes des points cherchés.

   (c) Les modules des affixes des deux points trouvés vaut 1 : $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1^2$. Les deux points de $\mathscr{E}$ appartiennent bien au cercle Γ.

3. (a) Si $z = e^{i\theta}$ alors $z' = e^{i\theta} + i - e^{-i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta + i - \cos\theta + i\sin\theta = 2i\sin\theta + i = (2\sin\theta + 1)i$.

   (b) Si M est un point de Γ, son affixe est de la forme $z = e^{i\theta}$. On vient de prouver que l'affixe de son image est égal à $(2\sin\theta + 1)i$ qui est un imaginaire pur. Donc M′ appartient à l'axe des ordonnées.
   De plus $-1 \leqslant \sin\theta \leqslant 1 \Rightarrow -2 \leqslant 2\sin\theta \leqslant 2 \Rightarrow -1 \leqslant 2\sin\theta + 1 \leqslant 3$.
   Conclusion : l'ordonnée de M′ est comprise entre −1, ordonnée du point C et 3 ordonnée du point A′, donc M′ ∈ [A′C].

EXERCICE IV (5 points) - Spé

1. (a) Le couple $(-2\ ;\ 1)$ vérifie l'équation $3u+7v=1$.
   $3\times(-2)+7\times 1=1$ donne en multipliant par 10^{2n}, $3\times\left(2\times 10^{2n}\right)+7\times 10^{2n}=10^{2n}$.
   Le couple $\left(-2\times 10^{2n}\ ;\ 10^{2n}\right)$ est donc une solution particulière de l'équation $\mathscr{E}$.

   (b)
   $$3x+7y=10^{2n} \iff 3x+7y=3x_0+7y_0$$
   et
   $$3x+7y=10^{2n} \iff 3(x-x_0)=7(y_0-y)$$
   3 divise $7\left(y_0-y\right)$ et est premier avec 7 : il divise donc y_0-y (Gauß). Il existe donc $k\in\mathbb{Z}$ tel que $y_0-y=3k$.
   En reportant dans l'égalité $3(x-x_0)=7(y_0-y)$, on obtient $x=7k+x_0$.
   Les couples solutions sont donc nécessairement de la forme $(x_0+7k; y_0-3k)$.
   Réciproquement, on vérifie aisément que tout couple de cette forme est effectivement solution de l'équation $\mathscr{E}$.
   Les solutions de cette équation sont donc exactement les couples $(x_0+7k; y_0-3k)$, $k\in\mathbb{Z}$.

2. (a) $100=7\times 14+2$ d'où l'affirmation $100\equiv 2 \mod 7$.
   $10^{2n}=100^n$ donc $10^{2n}\equiv 2^n \pmod 7$.
   Donc si $(x\ ;\ y)$ est une solution de $\mathscr{G}$, on a : $3x^2+7y^2\equiv 2^n \mod 7$.
   Mais $7y^2\equiv 0 \mod 7$, donc finalement $3x^2\equiv 2^n \mod 7$.

   (b)

Reste de la division euclidienne de x par 7	0	1	2	3	4	5	6
Reste de la division euclidienne de $3x^2$ par 7.	0	3	5	6	6	5	3

   (c) Tout entier n satisfait à l'un des trois cas suivants :
   - n est de la forme $3p$ où $p\in\mathbb{N}$. Dans ce cas $2^n=2^{3p}=\left(2^3\right)^p=8^p$. Or $8\equiv 1 \mod 7$, donc $8^p\equiv 1 \mod 7$ et $2^n\equiv 1 \pmod 7$.
   - n est de la forme $3p+1$ où $p\in\mathbb{N}$. Dans ce cas $2^n=2^{3p+1}=2^{3p}\times 2=8^p\times 2$. Or $8^p\equiv 1 \mod 7$, donc $2^n\equiv 2 \pmod 7$.
   - n est de la forme $3p+2$ où $p\in\mathbb{N}$. Dans ce cas $2^n=2^{3p+2}=2^{3p}\times 2^2=4\times 2^{3p}=4\times 8^p$. Comme $8^p\equiv 1 \mod 7$, $4\times 8^p\equiv 4 \mod 7$. Donc $2^n\equiv 4 \pmod 7$.

   Conclusion : 2^n est congru à 1, 2 ou 4 modulo 7.

   (d) On vient de voir que les restes dans la division par 7 de 2^n ne sont jamais les mêmes que ceux de la division de $3x^2$ par 7. Donc $3x^2$ et 2^n ne peuvent pas être congrus modulo 7. D'après le 2. a. il n'y a donc pas de solution pour l'équation $\mathscr{G}$.