TERMINALE S - EPREUVE DE MATHÉMATIQUES

BACCALAUREAT BLANC

Durée : 4 heures.

CORRIGE

EXERCICE I (5 points) VRAI FAUX

1	Soit le nombre complexe $z = 1 - i\sqrt{3}$ **Proposition 1** : « Si l'entier naturel n est un multiple de 3 alors z^n est un réel » **Réponse : VRAI** : Preuve : $z = 1 - i\sqrt{3}$; sa forme exponentielle est $z = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$ n étant un multiple de 3 s'écrit n = 3h avec $k \in \mathbb{Z}$ Ainsi $z^n = z^{3k} = \left(2e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)^{3k} = 2^{3k}e^{-ki\pi}$ Or $e^{-ki\pi}$ est un réel (positif si k est pair ; négatif si k est impair, nul si k est égal à zéro) et 2^{3k} est aussi un réel. En produit z^n est alors un réel
2	Soient f et g deux fonctions définies sur [0 ; + ∞ [, g ne s'annulant pas : **Proposition 2a** : « Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = -1$ » **Réponse : FAUX** Contre exemple : Si on prend $f(x) = -x^2$ (on a bien $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$) $g(x) = x$ (on a bien $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, mais $\frac{f(x)}{g(x)} = -x$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty \neq -1$
	Si f est une fonction définie sur [0 ; + ∞ [telle que $0 \leq f(x) \leq \sqrt{x}$ sur [0 ; + ∞ [, alors : **Proposition 2b** : « $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ » **Réponse : VRAI** : On utilise le théorème des gendarmes Comme on cherche la limite en +∞, on peut supposer x strictement positif, on obtient alors $0 \leq \frac{f(x)}{x} \leq \frac{\sqrt{x}}{x}$ Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$ D'après le théorème des gendarmes on obtient bien $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$
3	On considère la suite (U_n) définie par $U_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = \sqrt{7U_n}$ **Proposition 3** : « Pour tout entier naturel n , on a : $0 \leq U_n \leq 7$ » **Réponse : VRAI** Preuve par un raisonnement par récurrence Amorce : $U_0 = 2$ On a bien $0 \leq 2 \leq 7$ Hérédité : Supposons qu'il existe un certain entier n tel que $0 \leq U_n \leq 7$, on a alors $0 \leq 7U_n \leq 7\times 7$ La fonction racine carrée étant croissante sur les positifs $0 \leq \sqrt{7U_n} \leq \sqrt{7\times 7}$ $0 \leq U_{n+1} \leq 7$ Conclusion : Pour tout entier naturel n , on a : $0 \leq U_n \leq 7$

4	**Proposition 4a** : « L'ensemble des solutions de l'équation $x\ln x - x = 0$ est : { 0 , e } » **Réponse : FAUX** Le domaine de validité étant $]0;+\infty[$; 0 ne peut être une solution **Proposition 4b** : « L'ensemble des solutions de l'équation $(\ln x)^2 - 3\ln x - 4 = 0$ est : $\{-e\ ;e^4\}$ » **Réponse : FAUX** Le domaine de validité de l'équation étant $]0;+\infty[$; $-e$ étant un réel négatif, ne peut pas être solution de l'équation Autre méthode : $(\ln x)^2 - 3\ln x - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X = \ln x \\ X^2 - 3X - 4 = 0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} X = \ln x \\ X = -1 \quad \rightarrow ou\ X = 4 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \ln x = -1 \quad ou \quad \ln x = 4$ $\Leftrightarrow x = e^{-1} \quad ou \quad x = e^4$
	Soit (V_n) une suite, et a un réel strictement positif. On considère la suite (U_n) définie pour tout entier naturel n par $U_n = e^{-V_n} + 1$. **Proposition 5a** : « Si $V_0 = \ln a$ alors $U_0 = 1 - a$ » **Réponse : FAUX** $U_0 = e^{-V_0} + 1 = e^{-\ln a} + 1 = e^{\ln(a^{-1})} + 1 = a^{-1} + 1 = \frac{1}{a} + 1 \neq -a + 1$ **Proposition 5b** : « Pour tout entier naturel n, on a : $\ln(U_n) + V_n > 0$ » **Réponse : VRAI** $\ln(U_n) + V_n = \ln(e^{-V_n} + 1) + V_n = \ln(e^{-V_n} + 1) + \ln(e^{V_n}) = \ln\left[(e^{-V_n} + 1) \times e^{V_n}\right] = \ln(1 + e^{V_n})$ Or $1 + e^{V_n} > 1$ (*une exponentielle étant toujours strictement positive*) On a donc $\ln(1 + e^{V_n}) > \ln(1)$ (*ln strictement croissante*) et donc $\ln(1 + e^{V_n}) > 0$ (*car* $ln(1) = 0$)

EXERCICE II (5 points) - Nelle Calédonie nov 2010 – EX 2

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 2 cm.

On considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = -2i$ $z_B = -\sqrt{3} + i$ et $z_C = \sqrt{3} + i$

1) a) $z_A = -2i = 2e^{-i\pi/2}$

$|z_B| = |-\sqrt{3} + i| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{3 + 1} = 2$

Soit θ un argument de z_B. Alors $\cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\theta = \frac{1}{2}$. D'où $\theta = \frac{5\pi}{6}$.

$z_B = 2\,e^{i5\pi/6}$

$z_C = \sqrt{3} + i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 2\,e^{i\pi/6}$

b) $|z_A| = |z_B| = |z_C| = 2$ donc OA = OB = OC

c) *figure*

2) a) $\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \dfrac{-\sqrt{3} + i - (-2i)}{\sqrt{3} + i - (-2i)} = \dfrac{-\sqrt{3} + 3i}{\sqrt{3} + 3i} \times \dfrac{\sqrt{3} - 3i}{\sqrt{3} - 3i} = \dfrac{-3 + 3i\sqrt{3} + 3i\sqrt{3} + 9}{(\sqrt{3})^2 + 3^2} = \dfrac{6 + 6i\sqrt{3}}{12} = \dfrac{1 + i\sqrt{3}}{2}$

$\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\pi/3}$

b) $\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = e^{i\pi/3} \Leftrightarrow \left| \dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \right| = |e^{i\pi/3}|$ et $\arg \dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \arg e^{i\pi/3}\ (2\pi)$

$\Leftrightarrow \dfrac{|z_B - z_A|}{|z_C - z_A|} = 1$ et $(\overrightarrow{AC}\,;\overrightarrow{AB}) = \dfrac{\pi}{3}\ (2\pi)$

$\Leftrightarrow \dfrac{AB}{AC} = 1$ et $(\overrightarrow{AC}\,;\overrightarrow{AB}) = \dfrac{\pi}{3}\ (2\pi)$

$\Leftrightarrow AB = AC$ et $(\overrightarrow{AC}\,;\overrightarrow{AB}) = \dfrac{\pi}{3}\ (2\pi)$

On en déduit que le triangle ABC est équilatéral.

3) r est la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$ donc son écriture complexe est $z' - z_A = e^{i\pi/3}(z - z_A)$

a) $r(O) = O'$ donc $z_{O'} + 2i = e^{i\pi/3}(z_O + 2i) \Leftrightarrow z_{O'} = (\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2})(2i) - 2i = i - \sqrt{3} - 2i = -\sqrt{3} - i$

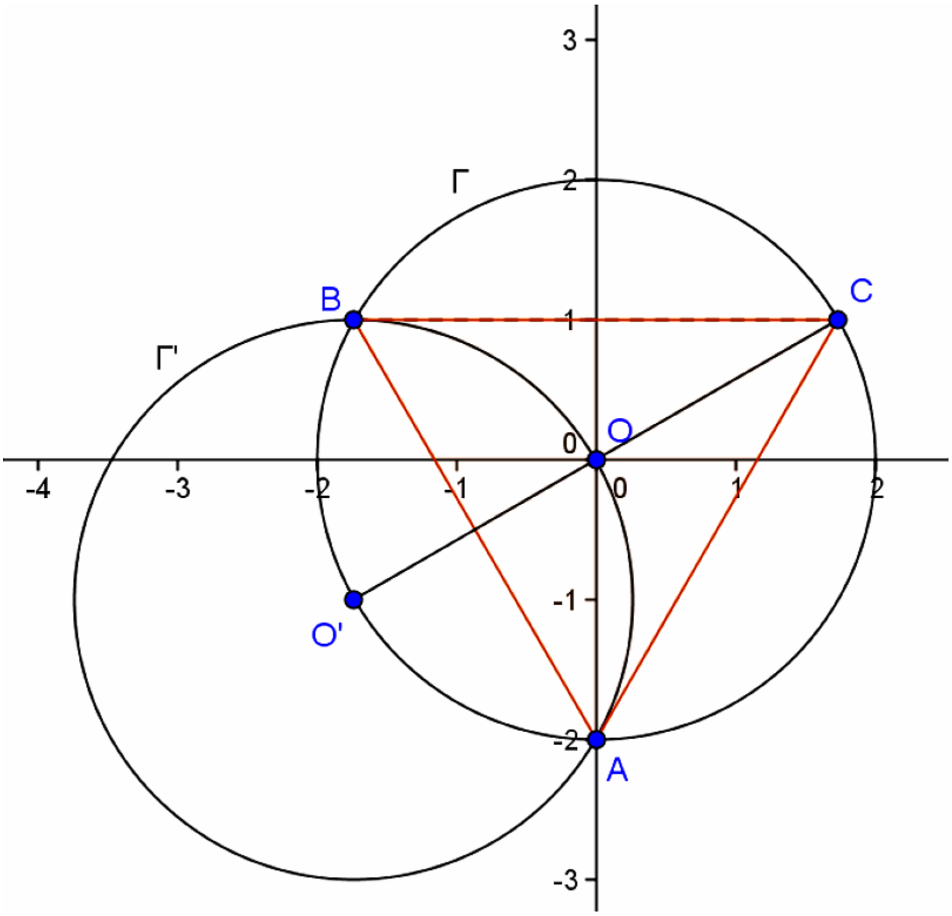
b) $C(z_C = \sqrt{3} + i)$ et $O'(z_{O'} = -\sqrt{3} - i)$
$z_{O'} = -z_C \Leftrightarrow \overrightarrow{OO'} = -\overrightarrow{OC} \Leftrightarrow \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow$ O est le milieu de [O'C]
On en déduit que les points O' et C sont diamétralement opposés sur le cercle Γ.

c) Γ' est l'image de Γ par r donc Γ' est le cercle de centre $O' = r(O)$ et de rayon 2. *figure*

d) $r : A \longmapsto A$
$\Gamma \longmapsto \Gamma'$
$C \longmapsto B$ car ACB est un triangle équilatéral direct.
$A \in \Gamma$ et $A' \in \Gamma'$, $C \in \Gamma$ donc $r(C) \in \Gamma'$ ainsi $B \in \Gamma'$ de plus $B \in \Gamma$.
Finalement, les cercles Γ et Γ' se coupent en A et B.

4) a) $|z| = |z + \sqrt{3} + i| \Leftrightarrow |z| = |z - (-\sqrt{3} - i)| \Leftrightarrow OM = OM' \Leftrightarrow MO = MO'$
L'ensemble (E) est la médiatrice du segment [OO'].

b) $|z_A| = 2$ et $|z_A + \sqrt{3} + i| = |\sqrt{3} - i| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{3 + 1} = 2$ donc
$|z_A| = |z_A + \sqrt{3} + i|$ et $A \in (E)$. De même, on montre que $B \in (E)$.



EXERCICE II (5 points) - Réunion juin 2005 modifié

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Pour tout entier $n > 0$, on définit la suite (S_n) par $S_n = \sum_{p=1}^{n} p^3 = 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3$.

1. Soient a et b deux entiers naturels non nuls.
   Démontrons que si PGCD $(a\ ;\ b) = 1$ alors PGCD $(a^2\ ;\ b^2) = 1$.
   PGCD(a ;b)=1 équivaut à « a et b n'ont pas de facteurs premiers communs »
   Comme a^2 a les mêmes facteurs premiers que a
   et b^2 a les mêmes facteurs premiers que b, *il est clair que* a^2 et b^2 n'ont pas de facteurs premiers communs et sont donc premiers entre eux.

2. Démontrons que, pour tout $n > 0$, on a : $S_n = \left(\frac{n\,(n+1)}{2}\right)^2$
   Démonstration par récurrence
   Initialisation : Si $n = 1$ alors $S_1 = \sum_1^1 p^3 = 1^3 = 1$ et $\left(\frac{1\,(1+1)}{2}\right)^2 = 1^2 = 1$
   Hérédité : Soit k est un entier naturel tel que : $\sum_{p=1}^{k} p^3 = \left(\frac{k\,(k+1)}{2}\right)^2$
   On cherche à établir que, sous cette hypothèse, on aura : $\sum_{p=1}^{k+1} p^3 = \left(\frac{(k+1)\,(k+2)}{2}\right)^2$

$$\sum_{p=1}^{k+1} p^3 = \left(\sum_{p=1}^{k} p^3\right) + (k+1)^3 = \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2 + (k+1)^3 = (k+1)^2\left(\frac{k^2}{4} + k + 1\right)$$

$$= (k+1)^2 \frac{k^2+4k+4}{4} = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$$

Conclusion :
la propriété est vraie pour $n = 1$ et elle est héréditaire elle est donc vraie pour tout entier naturel $n > 0$.

3. On suppose dans cette question que n est pair. Soit k l'entier naturel non nul tel que $n = 2k$.

a) Démontrons que PGCD(S_{2k} ; S_{2k+1}) = $(2k+1)^2$ PGCD (k^2 ; $(k+1)^2$).

$$S_{2k} = \left(\frac{2k(2k+1)}{2}\right)^2 = k^2(2k+1)^2 \text{ et } S_{2k+1} = \left(\frac{(2k+1)(2k+2)}{2}\right)^2 = (k+1)^2(2k+1)^2$$

donc PGCD(S_{2k} ; S_{2k+1}) = PGCD($(k+1)^2(2k+1)^2$; $k^2(2k+1)^2$) = $(2k+1)^2$ PGCD (k^2 ; $(k+1)^2$).

b) Calculons PGCD (k ; $k+1$).

$k + 1 - k = 1$ il existe donc deux entiers relatifs u et v tels que $u(k+1) + vk = 1$.
D'après le théorème Bézout k et $k + 1$ sont donc premiers entre eux.
PGCD (k ; $k+1$)= 1 donc PGCD (k^2 ; $(k+1)^2$) = 1 d'après la question 1.

c) Calculons PGCD (S_{2k} ; S_{2k+1}).

PGCD(S_{2k} ; S_{2k+1}) = $(2k+1)^2$ PGCD (k^2 ; $(k+1)^2$) = $(2k+1)^2$

4. On suppose dans cette question que n est impair. Soit k l'entier naturel non nul tel que $n = 2k+1$.

a) Démontrons que les entiers $2k+1$ et $2k+3$ sont premiers entre eux.

Soit d le PGCD de $2k+1$ et $2k+3$. d divise toute combinaison linéaire à coefficients entiers de $2k+1$ et $2k+3$, en particulier d divise $-(2k+1)+(2k+3)=2$. d ne peut donc valoir que 1 ou 2.
Et il est clair que d ne vaut pas 2 puisque 2k+1 et 2k+3 sont impairs. d vaut donc 1.

b) Calculons PGCD(S_{2k+1} ; S_{2k+2}).

$S_{2k+1} = (k+1)^2(2k+1)^2$ et $S_{2k+2} = (k+1)^2(2k+3)^2$ donc
PGCD(S_{2k+1} ; S_{2k+2}) = $(k+1)^2$ PGCD ($(2k+1)^2$; $(2k+3)^2$).
PGCD ($2k+1$; $2k+3$)= 1 donc PGCD ($(2k+1)^2$; $(2k+3)^2$) = 1 et PGCD(S_{2k+1} ; S_{2k+2}) = $(k+1)^2$

5. Quels sont les entiers naturels n non nuls tels que S_n et S_{n+1} sont premiers entre eux ?

Pour n de la forme 2k (k>0) :
$(2k+1)^2 = 1 \Leftrightarrow k = 0$ ou $k = -1$ ce qui ne correspond pas à des cas possibles (on a n>0).
Pour n de la forme 2k+1 (k entier naturel) :
$(k+1)^2 = 1 \Leftrightarrow k = 0$ ou $k = -2$. La seule valeur de n possible est donc 1. S_1 et S_2 sont premiers entre eux et il n'existe pas d'autre entier n tel que S_n et S_{n+1} sont premiers entre eux.

EXERCICE III (*4 points*) Métropole sept 2010 – EX 3 – Modifié

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.
Soit (P) le plan d'équation $3x + y - z - 1 = 0$ et (D) la droite dont une représentation paramétrique est

$\begin{cases} x = -t+1 \\ y = 2t \\ z = -t+2 \end{cases}$ où t désigne un nombre réel.

1. Soit M un point de (D). Il existe donc un réel t tel que M $(-t+1\,;\,2t\,;\,-t+2)$
Or $3(-t+1)+2t-(-t+2)-1 = -3t+3+2t+t-2-1 = 0$ quel que soit t
Donc $M \in$ (P)
Tout point de (D) est donc un point de (P), donc $\boxed{\text{la droite (D) est incluse dans le plan (P)}}$.

2. $3x_C + y_C - z_C - 1 = 3\times1+3-2-1 = 3 \neq 0$ donc $\boxed{C(1\,;\,3\,;\,2) \notin (P)}$

3. Soit (Q) le plan passant par le point C et orthogonal à la droite (D).

a. Un vecteur normal au plan (Q) est un vecteur directeur de (D) ;

d'après la représentation paramétrique, un vecteur directeur de (D) est $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}$

$M(x\,;\,y\,;\,z) \in (Q) \Leftrightarrow -x+2y-z+d = 0$.
Or C(1 ; 3 ; 2) $\in$ (Q) $\Leftrightarrow -1+2\times3-2+d = 0 \Leftrightarrow 3+d = 0 \Leftrightarrow d = -3$.
$\boxed{\text{Une équation du plan (Q) est donc : } -x+2y-z-3 = 0}$.

b. Soit $M(-t+1\,;\,2t\,;\,-t+2)$ un point de (D).
$M \in (Q) \Leftrightarrow -(-t+1)+2\times2t-(-t+2)-3 = 0 \Leftrightarrow t-1+4t+t-2-3 = 0 \Leftrightarrow 6t-6 = 0 \Leftrightarrow t = 1$.
Donc le point commun I à (Q) et à (D) a pour coordonnées $(-1+1\,;\,2\times1\,;\,-1+2)$

Donc $\boxed{\text{I }(0\,;\,2\,;\,1)}$.

c. On a $\overrightarrow{CI}\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix}$ donc $CI = \sqrt{1+1+1} = 3$ $\boxed{CI = \sqrt{3}}$.

4. Soit t un nombre réel et M_t le point de la droite (D) de coordonnées $(-t+1\,;\,2t\,;\,-t+2)$.

a. $\overrightarrow{CM_t}\begin{pmatrix}-t\\2t-3\\t\end{pmatrix}$ donc $CM_t = \sqrt{(-t)^2+(2t-3)^2+t^2} = \sqrt{6t^2-12t+9}$

donc pour tout nombre réel t, $\boxed{CM_t^2 = 6t^2-12t+9}$.

b. $6t^2-12t+9$ est un trinôme qui admet un minimum en $t = -\dfrac{b}{2a} = 1$

La valeur minimale de CM_t est donc $CM_1 = \sqrt{6\times1^2-12\times1+9} = \sqrt{3} = \text{CI}$

$\boxed{CI \text{ est la valeur minimale de } CM_t \text{ lorsque } t \text{ décrit l'ensemble des nombres réels}}$.

EXERCICE IV (6 points) Polynésie sept 2010 – EX 4

Partie 1

Soit g la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $g(x)=e^x-xe^x+1$.

1. Limite de g en $+\infty$:

$g(x)=e^x(1-x)+1$ or $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-x)=-\infty$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty}$

2. Étude des variations de la fonction g :

g forme W – UV ; $g'(x)=e^x-\left(e^x+xe^x\right)=-x\,e^x$

$g'(x)\leq 0$ (ne s'annule qu'en une valeur 0) car $e^x>0$ et $-x\leq 0$; $\boxed{\text{g est strictement décroissante}}$

3. Tableau de variations de g.

x	0		$+\infty$
g'(x)	**0**	–	
g	2	↘	$-\infty$

4. a. g est continue et strictement monotone sur $[0;+\infty[$

De plus g (0) = 2 > 0 et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty<0$

donc l'équation $g(x)=0$ admet sur $[0;+\infty[$ une unique solution α.

b. À l'aide de la calculatrice, on obtient :

- $g(1)=1$ et $g(2)\approx-6{,}4$ donc $1<\alpha<2$;
- $g(1{,}2)\approx 0{,}3$ et $g(1{,}3)\approx -0{,}1$ donc $1{,}2<\alpha<1{,}3$;
- $g(1{,}27)\approx 0{,}04$ et $g(1{,}28)\approx -0{,}007$ donc $\boxed{1{,}27<\alpha<1{,}28}$.

c. g (α) = 0 donc $e^\alpha-\alpha e^\alpha+1=0$ donc $(1-\alpha)e^\alpha=-1$ donc $\boxed{e^\alpha=\dfrac{1}{\alpha-1}}$.

5. Signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x :

$\boxed{g(x)>0 \text{ sur } [0;\alpha[\ ;\ g(\alpha)=0\ ;\ g(x)<0 \text{ sur }]\alpha;+\infty[}$

Partie 2

Soit A la fonction définie et dérivable sur $[0;+\infty[$ telle que $A(x)=\dfrac{4x}{e^x+1}$.

1. A est de la forme $\dfrac{u}{v}$; $A'(x)=\dfrac{4\left(e^x+1\right)-4xe^x}{\left(e^x+1\right)^2}=\dfrac{4e^x-4xe^x+4}{\left(e^x+1\right)^2}=\dfrac{4g(x)}{\left(e^x+1\right)^2}$

donc pour tout réel x positif ou nul, $A'(x)$ a le même signe que $g(x)$ car $\left(e^x+1\right)^2>0$

2. Variations de la fonction A sur $[0;+\infty[$:

x	0		α		$+\infty$
$A'(x)$		+	0	–	
A		↗		↘	

Partie 3

On considère la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{4}{e^x+1}$. On note (C) sa courbe représentative Pour tout réel x positif ou nul, on note :

M le point de (C) de coordonnées $(x\,;f(x))$,

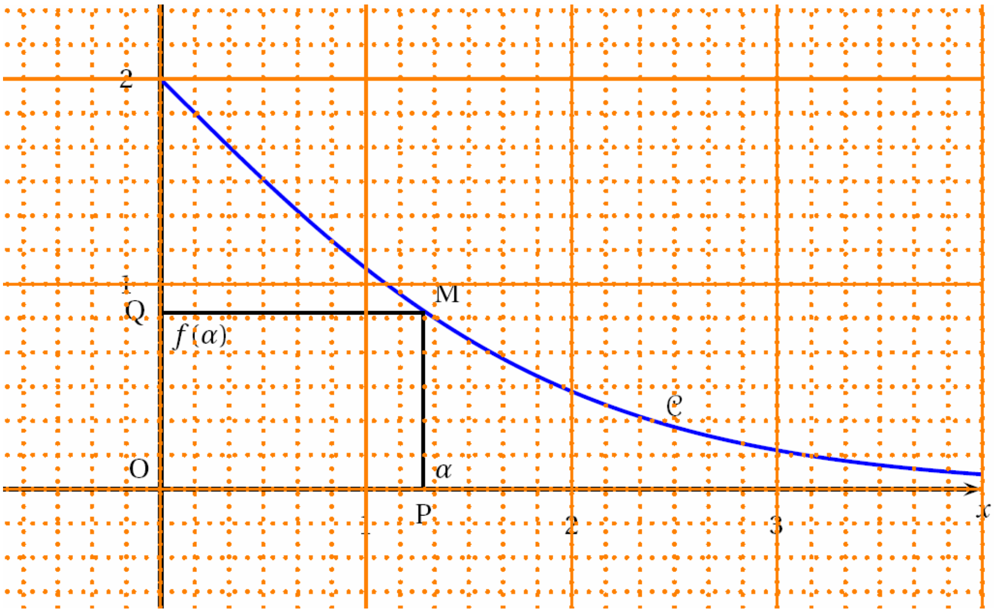
P le point de coordonnées $(x\,;0)$,

Q le point de coordonnées $(0\,;f(x))$.

1. L'aire du rectangle OPMQ vaut $x\times f(x)=\dfrac{4x}{e^x+1}=A(x)$

   Donc, d'après ce qui précède, l'aire du rectangle $OPMQ$ est maximale lorsque M a pour abscisse α.

2. Le point M a pour abscisse α.



La droite (PQ) a pour coefficient directeur : $m_1=\dfrac{y_Q-y_P}{x_Q-x_P}=\dfrac{f(x)-0}{0-x}=-\dfrac{f(x)}{x}=-\dfrac{f(\alpha)}{\alpha}$ *car* $x=\alpha$

Donc $m_1=-\dfrac{\frac{4}{e^\alpha+1}}{\alpha}=-\dfrac{4}{\alpha\left(e^\alpha+1\right)}$

La tangente (T) en M à la courbe (C) a pour coefficient directeur : $m_2=f'(\alpha)$

Or $f'(x)=\dfrac{-4e^x}{\left(e^x+1\right)^2}$ donc $m_2=f'(\alpha)=\dfrac{-4e^\alpha}{\left(e^\alpha+1\right)^2}$

$$m_2-m_1=\frac{-4e^\alpha}{\left(e^\alpha+1\right)^2}+\frac{4}{\alpha\left(e^\alpha+1\right)}+=\frac{-4\alpha e^\alpha+4(e^\alpha+1)}{\alpha\left(e^\alpha+1\right)^2}=\frac{-4\alpha e^\alpha+4e^\alpha+4}{\alpha\left(e^\alpha+1\right)^2}=\frac{4g(\alpha)}{\alpha\left(e^\alpha+1\right)^2}$$

Or $g(\alpha)=0$ donc $m_2-m_1=0$ et donc $m_2=m_1$

Les coefficients directeurs sont égaux donc :

$\boxed{\text{La tangente (T) en } M \text{ à la courbe (C) est parallèle à la droite } (PQ)\text{ ?}}$