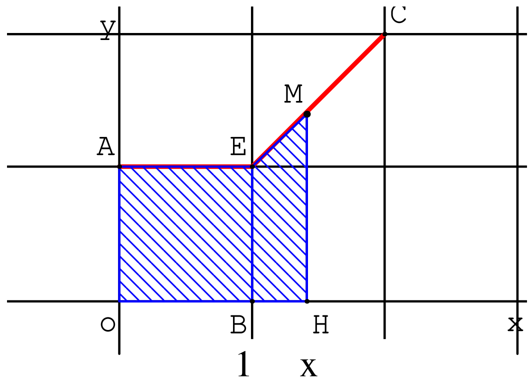
Exo	CALCUL INTEGRAL

Calcul d'integrales



1 – Soit x un réel de l'intervalle [1 ; 2].
Calculer l'aire hachurée de deux manières différentes :

2 – Calculer les intégrales suivantes :

a) $\int_1^2 \left(5x - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}\right) dx$ b) $\int_1^4 \frac{2}{\sqrt{x}} dx$ c) $\int_{-1}^1 (t+3)^5 \, dt$

d) $\int_0^1 e^{-3x} dx$ e) $\int_e^{e^2} \frac{\ln x}{x} dx$ f) $\int_{-1}^2 dx$ g) $\int_1^2 \frac{1}{x^3} dx$

3 – a) Montrer que : pour tout réel x, $\frac{e^{2x}}{1+e^x} = e^x - \frac{e^x}{1+e^x}$

b) En déduire la valeur de I = $\int_0^{\ln(2)} \frac{e^{2x}}{1+e^x} dx$.

4 – On considère la fonction f définie sur [1 , + ∞[par : $f(x) = \frac{3x+14}{(3x-2)(x+2)}$.

1°) Déterminer les réels a et b tels que, pour tout x de [1 , + ∞[: $f(x) = \frac{a}{3x-2} + \frac{b}{x+2}$.

2°) En déduire la valeur exacte de l'intégrale I = $\int_1^2 f(x) \, dx$.

Intégrales et suites

5 – Pour tout entier naturel non nul n, on définit $I_n = \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx$.

1°) Démontrer que $\frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{1}{n}$, et étudier la convergence de la suite (I_n).

2°) Peut-on retrouver ce résultat par une autre méthode ?

6 – Pour tout entier naturel n non nul, on pose $U_n = \int_0^1 e^{-\frac{x^2}{n}} dx$

1°) Donner un encadrement de U_n .

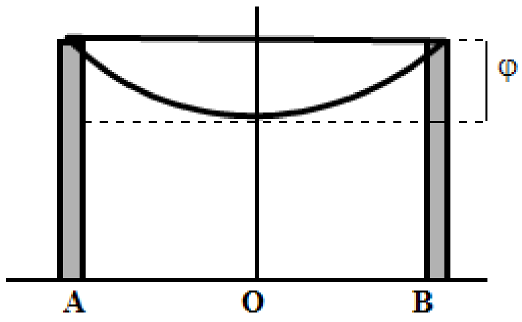
2°) En déduire que la suite (U_n) est convergente et donner sa limite.

Applications du calcul intégral

7 – Cet exercice étudie la courbe C décrite par un câble souple, non élastique, suspendu par ses extrémités
à deux piliers de même hauteur et situés à la même altitude.

On donne **d = OA = OB = 10 mètres**.
On choisit un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
La courbe est celle de la fonction f définie sur [-10,10] par :

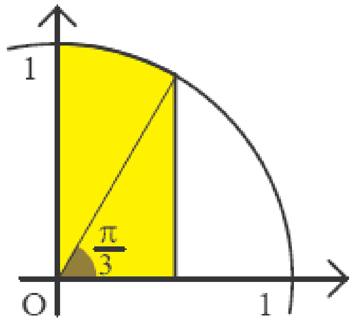
$$f(x) = 10 \operatorname{ch}\left(\frac{x}{10}\right) = 5\left(e^{\frac{x}{10}} + e^{-\frac{x}{10}}\right).$$



1°) Dresser le tableau de variation de f.
2°) a) Déterminer la hauteur h des piliers.
b) Calculer la valeur de la flèche φ .
c) ***Rectifier*** *une courbe, c'est calculer sa longueur ;*
On admet que la longueur de l'arc de courbe représentative d'une fonction f sur l'intervalle [a,b]
est : $\ell = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$.
Calculer, en mètres, la longueur L du câble.

8 – Déterminer l'aire du domaine ombré ci-contre.

En déduire la valeur de $I = \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 - x^2}\, dx$



9 – Soit la fonction f définie sur] 0 , + ∞ [par : $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$

1) Etudier les limites de f aux bornes de D_f .
2) Etudier les variations de f .
3) Tracer la courbe C (*repère orthogonal : unité 2 cm sut (Ox) et 6 cm sur (Oy)*).
4) Démontrer que la fonction F définie sur] 0 , + ∞ [par $F(x) = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}$ est une primitive de f .
5) Calculer en cm², l'aire de la partie du plan limitée par C, l'axe des abscisses et les droites d'équation x = 1 et x = e.

10 – Déterminer l'aire comprise entre les courbes représentatives de la fonction carrée et de la fonction cube sur l'intervalle [0; 1].

11 – Suite à un début de maladie infectieuse dans une région, on a constaté que le nombre de personnes ayant contracté la maladie t jours après l'apparition des premiers cas est donné par :

$$f(t) = 45t^2 - t^3 \text{ pour } 0 \le t \le 25.$$

Calculer le nombre moyen de personnes malades durant les huit premiers jours.

12 – La capacité pulmonaire, exprimée en litres, de l'être humain suivant son âge x , de 10 à 90 ans, a été modélisée par la fonction f telle que : $f(x) = \frac{110\,(\ln x - 2)}{x}$.
Déterminer la valeur moyenne de la capacité pulmonaire de 20 à 70 ans, à 0,1 litres près par défaut.