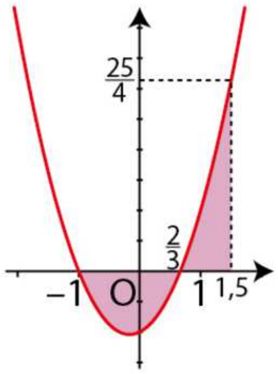
Exo CALCUL INTEGRAL - 2

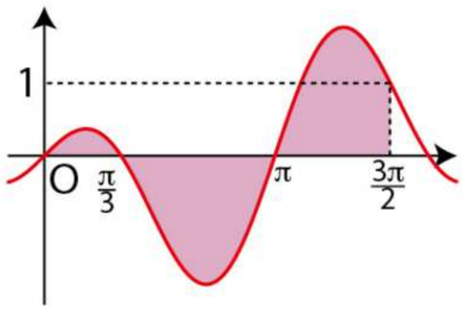
Exercice 13

Dans chaque cas, calculer l'aire, en unités d'aire, du domaine coloré.

a) $x \mapsto 3x^2 + x - 2$



b) $x \mapsto (2\cos x - 1)\sin x$



Exercice 14

On se propose de donner un encadrement de l'intégrale :

$$I = \int_0^1 e^{\sin x}\,dx.$$

1. a) Étudier les variations de la fonction f définie sur $[0\,;1]$ par :

$$f(x) = \sin x - x.$$

b) En déduire que, pour tout nombre réel x de $[0\,;1]$,

$$e^{\sin x} \leqslant e^x.$$

2. a) Étudier les variations de la fonction g définie sur $[0\,;1]$ par $g(x) = e^x - x - 1$.

b) En déduire que, pour tout nombre réel x de $[0\,;1]$,

$$e^{\sin x} \geqslant 1 + \sin x.$$

3. En déduire un encadrement de I.

Exercice 15

u est la suite définie, pour tout nombre entier naturel $n \geqslant 1$ par $u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx$.

1. Démontrer que la suite u est décroissante et minorée.

2. a) Démontrer que, pour tout nombre entier naturel n, $u_{n+1} + u_n = \frac{1}{n+1}$.

b) En déduire que la suite converge vers 0.

Exercice 16

F et G sont les fonctions définies sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ par :

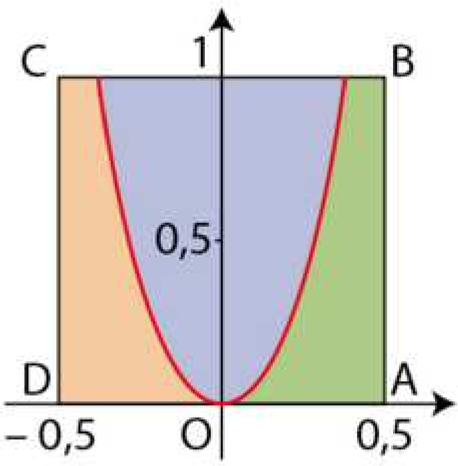
$F(x) = \int_0^x t^2 \cos t\,dt$ et $G(x) = 2x\cos x + (x^2 - 2)\sin x + 1$.

a) Calculer $F'(x)$ et $G'(x)$.

b) En déduire qu'il existe un nombre réel k tel que, pour tout x de $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$, $F(x) = G(x) + k$.

c) Déterminer la valeur de k.

Exercice 17



Problème Dans un repère orthonormé d'origine O, on donne : $A\left(\frac{1}{2};0\right)$, $B\left(\frac{1}{2};1\right)$, $C\left(-\frac{1}{2};1\right)$ et $D\left(-\frac{1}{2};0\right)$.

Déterminer la fonction dont la courbe est la parabole de sommet O et qui sépare le carré ABCD en trois parties d'aires $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{4}$.