Mémo — CALCUL INTEGRAL

I - INTEGRALE D'UNE FONCTION SUR UN INTERVALLE

Soient f une fonction continue sur un intervalle I, F une primitive de f sur I, a et b des réels de I.

$$\int_a^b f(x)dx = [\,F(x)\,]_a^b = F(b) - F(a)$$

Vocabulaire : a et b sont les **bornes** (a est appelé *borne inférieure* et b *borne supérieure*).

Théorème (admis) :

Toute fonction continue sur [a,b] admet une intégrale sur cet intervalle.

II - PROPRIETES DE L'INTEGRALE

Dans tout le paragraphe, f et g sont des fonctions continues sur un intervalle I, et a ,b , c sont des réels de I.

1°) PROPRIETES ELEMENTAIRES

$$\int_a^a f(x)dx = 0 \qquad\qquad \int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$$

2°) LINEARITE

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \qquad\qquad \int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

où k est une constante réelle

3°) POSITIVITE

Si $f \geq 0$ et si $a \leq b$ alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$

Conséquence :

Si $f \leq g$ sur I et si $a \leq b$ alors $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

4°) RELATION DE CHASLES

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

5°) VALEUR MOYENNE

Définition :

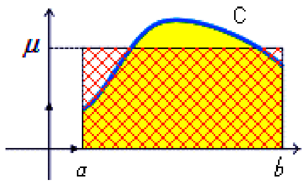
On appelle valeur moyenne de f sur [a , b] le nombre μ tel que :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \mu\,(b-a)$$

Donc :

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

Interprétation graphique (*pour* $f \geq 0$) :



III - FONCTION INTEGRALE

Propriété : Soit f une fonction continue sur un intervalle I, et $a \in$ I .

La fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$ est la primitive de f sur I, qui s'annule en a.

IV - APPLICATIONS DU CALCUL INTEGRAL

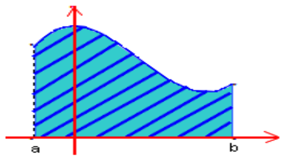
unité d'aire

Dans un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$, on appelle unité d'aire (notée u.a.), l'aire du rectangle déterminé par les vecteurs du repère. 1 u.a. $= \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\|$ cm²

CALCUL DE L'AIRE « SOUS UNE COURBE » (*cas où* $f \geq 0$)

Soit f une fonction définie, dérivable et **positive** sur un intervalle sur [a , b].

L'aire en u.a. du domaine du plan limité par la courbe représentative C de f, (Ox), et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ est : $\mathcal{A} = \int_a^b f(x)dx$



CALCUL DE L'AIRE D'UN DOMAINE DELIMITE PAR DEUX COURBES

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I, telles que $f \geq g$ sur [a , b].

On suppose que $f \geq g$ sur [a , b].

L'aire, en unités d'aire, du domaine délimité par les courbes représentatives de f et g est : $\mathcal{A} = \int_a^b f(x) - g(x)\,dx$.

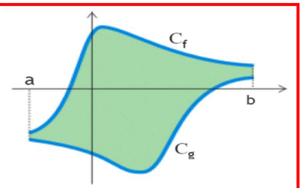


TABLEAU DES PRIMITIVES - Rappels

Fonctions usuelles

Ensemble sur lequel les primitives existent	FONCTION f (x)	Une primitive F (x)
$\mathbb{R}$	a	a x
$\mathbb{R}$ si $n \in \mathbb{N}^*$;] 0,+∞[si $n \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$	x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
]- ∞, 0[*ou*] 0,+ ∞[	$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x}$
] 0,+ ∞ [	$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$
] 0,+ ∞ [	$\frac{1}{x}$	$\ln x$
$\mathbb{R}$	e^x	e^x

Règles

TYPE DE FONCTION	PRIMITIVE
k u	k U
u + v	U + V
$U'U^n$	$\frac{U^{n+1}}{n+1}$
$\frac{U'}{U^2}$	$\frac{-1}{U}$
$\frac{U'}{\sqrt{U}}$	$2\sqrt{U}$
$\frac{U'}{U}$	$\ln \lvert U \rvert$
$U'e^U$	e^U