Mémo — DENOMBREMENT

Dénombrer, c'est compter des objets. On peut, pour dénombrer, s'aider de représentations graphiques (diagramme de Venn, arbre, tableau croisé …), ou de formules.

Factorielles

Définition : Soit n un entier naturel non nul. On note $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 1$.

Par convention : $0! = 1$

Dénombrer des k-uplets (ou k-listes) d'un ensemble fini E

Le nombre de k-listes d'un ensemble E à n éléments (distincts ou confondus) est n^k.

Soient E un ensemble fini à n éléments ($n \geq 1$) et k un entier non nul tel que $k \leq n$.
Une k-liste d'éléments **distincts** de E est appelé **k-arrangement** de E.

Le nombre de k-arrangements d'un ensemble E à n éléments, avec $1 \leq k \leq n$, est :

$$A_n^k = n \times (n-1) \times \ldots \times (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Cas particulier où $k = n$: Soit E un ensemble fini à n éléments ($n \geq 1$).
Un n-uplet d'éléments **distincts** deux à deux de E est appelé **permutation**.

Le nombre de permutations possibles d'un ensemble à n éléments est n !

(*n-uplets d'éléments* distincts)

Synthèse – Nombre de k-uplets (ou k-listes) d'un ensemble à n éléments.

	$k < n$	$k = n$	$k > n$
Eléments distincts ou non	n^k		
Eléments distincts	$n \times (n-1) \times \ldots \times (n-k+1)$ *Arrangement*	$n\,!$ *Permutation*	

Dénombrer des parties ou sous-ensembles d'un ensemble fini E

Définition : Soit E un ensemble fini à n éléments ($n \geq 1$) et k entier naturel tel que $k \leq n$.
Une **combinaison** de k éléments parmi n est un sous-ensemble à k éléments pris parmi les n éléments.
Le nombre de combinaisons de k éléments pris parmi n est noté $\binom{n}{k}$ ou C_n^k. *On lit : « k parmi n »*

Exemple : Si $E = \{a, b, c, d\}$ alors $\{a, c\}$ est une combinaison de 2 éléments parmi 4.

Propriétés : Soient n et k entiers naturels, $k \leq n$

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

$$\binom{n}{0} = 1 \qquad \binom{n}{1} = n \qquad \binom{n}{n} = 1 \qquad \binom{n}{n-k} = \binom{n}{k} \qquad \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

Propriété – Relation de Pascal : Soient n et k entiers naturels, $1 \leq k \leq n - 1$.

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$$

n \ k	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

Triangle de Pascal

Blaise Pascal.

Savant mathématicien physicien et philosophe français (Clermont-Ferrand 1623 - Paris 1662)

$\binom{n}{k}$ *sont appelés* ***coefficients binomiaux.***

Formule du binôme de Newton *Pour tous réels a et b et pour tout entier naturel n :*

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \ldots + \binom{n}{n} b^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Tirage d'un échantillon de *k* éléments dans une population de *n* individus :

Mode de tirage	Descriptif	Terme caractéristique	Conditions	Nombre de tirages
Tirages successifs avec remise	*Tirages non exhaustifs :* Eléments distincts ou non et ordonnés	listes	*n* et *k* non nuls	Nombre de listes de *k* éléments choisis parmi *n* : n^p
Tirages successifs sans remise	*Tirages exhaustifs :* Eléments distincts et ordonnés	Arrangements	$0 \leq k \leq n$	Nombre d'arrangements de *k* éléments parmi *n* : A_n^k
	Cas particulier :	Permutations	$n = k$	Nombre de permutations de *n* éléments : $A_n^n = n\,!$
Tirages simultanés	Parties à p éléments d'un ensemble à n éléments : Eléments distincts et non ordonnés	Combinaisons	$0 \leq k \leq n$	Nombre de combinaisons de *k* éléments choisis parmi *n* : $\binom{n}{k}$

Exhaustif : qui épuise un sujet et le traite en détail (En anglais : *To exhaust = épuiser*).
De manière exhaustive : énumérer tous les cas possibles.