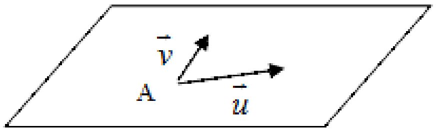
Mémo — ESPACE – DROITES ET PLANS

L'espace est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

CARACTERISATION D'UN PLAN

- ***Plan défini par un point et deux vecteurs directeurs***



Définition :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires de l'espace.

Le plan $\mathscr{P}$ passe par un point A et a pour vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ signifie que $\mathscr{P}$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} = \alpha\,\vec{u} + \beta\,\vec{v}$ où α et β réels.

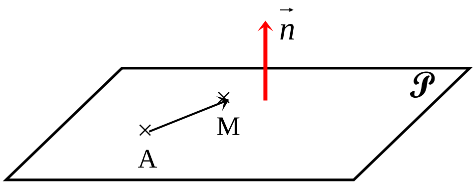
- ***Plan défini par trois points.***

Le plan (ABC) est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} = \alpha\,\overrightarrow{AB} + \beta\,\overrightarrow{AC}$ où α et β réels.

- ***Plan défini par un point et un vecteur normal***

Propriété :

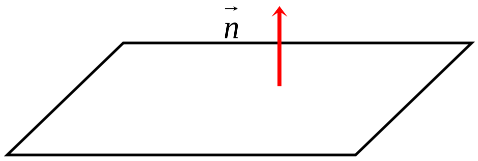
Le plan P passant par un point A donné et dont un vecteur normal est $\vec{n} \neq \vec{0}$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$



VECTEUR NORMAL A UN PLAN

Définition :

Un vecteur normal à un plan est un vecteur directeur d'une droite orthogonale à ce plan.



EQUATION CARTESIENNE D'UN PLAN

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère **orthonormal** de l'espace.

Propriété :

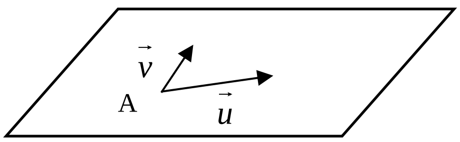
Tout plan de l'espace admet une équation de la forme $a\,x + b\,y + c\,z + d = 0$ où a, b, c sont des réels non tous nuls, et d un réel quelconque.

Réciproquement,
toute équation de la forme $a\,x + b\,y + c\,z + d = 0$ est celle d'un plan de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

Définition :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires de l'espace.

Le plan $\mathscr{P}$ passe par un point A et a pour vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ signifie que $\mathscr{P}$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} = \alpha\,\vec{u} + \beta\,\vec{v}$



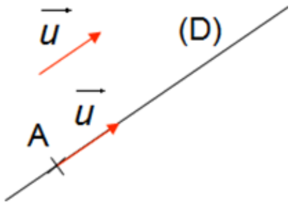
REPRESENTATIONS PARAMETRIQUES

1°) Représentation paramétrique d'une droite

Propriété 1 :

Soit D une droite passant par A (x_A , y_A , z_A) et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}$.

M (x, y, z) ∈ D ⇔ il existe un réel k tel que $\begin{cases}x = x_A + k\alpha\\ y = y_A + k\beta\\ z = z_A + k\gamma\end{cases}$



Ce système est une **représentation paramétrique** de D.

Propriété 2 :

Si α, β, γ sont trois réels non nuls simultanément, le système $\begin{cases}x = a + t\alpha\\ y = b + t\beta\\ z = c + t\gamma\end{cases}$ où t réel, est une représentation paramétrique de la droite passant par le point A (a, b, c) et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}$.

Remarques :

- Le paramètre k peut-être remplacé par n'importe quelle autre lettre distincte de x, y, z.
- A chaque réel k correspond un unique point M de la droite.
- Il n'y a pas unicité de la représentation paramétrique d'une droite dans l'espace.

2°) Représentation paramétrique d'un plan

Propriété 3 :

Soit P un plan passant par A (x_A , y_A , z_A) et de vecteurs directeurs $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}\alpha'\\\beta'\\\gamma'\end{pmatrix}$.

M (x, y, z) ∈ P ⇔ il existe deux réels k et k' tels que $\begin{cases}x = x_A + k\alpha + k'\alpha'\\ y = y_A + k\beta + k'\beta'\\ z = z_A + k\gamma + k'\gamma'\end{cases}$

Ce système est une **représentation paramétrique** de P.

Propriété 4 :

α, β, γ, α', β', γ' sont des réels tels que α, β, γ ne soient pas proportionnels à α', β', γ'

Le système $\begin{cases}x = a + k\alpha + k'\alpha'\\ y = b + k\beta + k'\beta'\\ z = c + k\gamma + k'\gamma'\end{cases}$ où t et t' réels, est une représentation paramétrique du plan passant par le point A (a, b, c) et de vecteurs directeurs $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}\alpha'\\\beta'\\\gamma'\end{pmatrix}$.

Remarque : Il n'y a pas unicité de la représentation paramétrique d'un plan dans l'espace.