Sujet 1 – Exercice 2 – Espace **M12**

Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère les points $A(3;-1;2)$, $B(0;-1;1)$ et $C(-3;4;2)$.

Soit d la droite dont voici une représentation paramétrique $\begin{cases} x = t + \frac{3}{2} \\ y = -t - 1 \\ z = 2t + 2 \end{cases}$ où $t \in R$.

1. a. Le point A appartient-il à la droit d ? Justifier.

b. Déterminer une représentation paramétrique de la droite d' parallèle à d passant par C.

2. On considère le plan P d'équation $2x - y + 3z + 1 = 0$.

a. Déterminer l'intersection de P et de d.

b. Démontrer que les points A, B et C définissent bien un plan.

c. P et (ABC) sont-ils parallèles ?

3. On considère le point D (7 ; -1 ; 4).

a. Déterminer la distance de D au plan P.

b. On considère la sphère de centre D et de rayon 7.
Déterminer l'intersection de S avec P.

Sujet 1 – Exercice 2 – Espace **M12**

Eléments de correction

1. a. Non, il n'existe pas de paramètre t qui relie les coordonnées de A.

b. Une représentation paramétrique de la droite d' est : $\begin{cases} x = t - 3 \\ y = -t + 4 \\ z = 2t + 2 \end{cases}$ Où $t \in R$.

2. a. P et d se coupent selon le point $E\left(\frac{5}{18}; \frac{2}{9}; -\frac{4}{9}\right)$.

b. $\overrightarrow{AB}(-3; 0; -1)$ et $\overrightarrow{AC}(-6; 5; 0)$. $\frac{-3}{-6} \neq \frac{0}{5}$ donc A, B et C ne sont pas alignés : ces points forment bien un plan.

c. $\vec{n}(2; -1; 3)$ est un vecteur normal de P.

On a $\vec{n}.\overrightarrow{AB} \neq 0$ donc P et (ABC) ne sont pas parallèles.

En effet, si P et (ABC) étaient parallèles, $\vec{n}$ serait orthogonal à 2 vecteurs directeurs du plan (ABC) (*et même à tout vecteur du plan*), donc en particulier à $\overrightarrow{AB}$.
Ce qui n'est pas le cas.

3. a. $D\ (7\ ; -1\ ; 4)$.

La distance de D au plan P est DH, avec H projeté orthogonal de D sur P.
Cherchons H (*x* ; *y* ; *z*).
H doit remplir deux conditions :

- $\overrightarrow{DH}$ orthogonal à P donc $\overrightarrow{DH}$ et $\vec{n}$ colinéaires donc il existe un réel k tel que $\overrightarrow{DH}$ = k $\vec{n}$.
- H doit appartenir au plan P donc ses coordonnées doivent vérifier l'équation cartésienne de P.
-

Or $\overrightarrow{DH}\begin{pmatrix} x - 7 \\ y + 1 \\ z - 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, donc $\begin{cases} x - 7 = 2k \\ y + 1 = -k \\ z - 4 = 3k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 + 2k \\ y = -1 - k \\ z = 4 + 3k \end{cases}$

Et comme H $\in$ P, on a la 4e équation :

$$2x-y+3z+1=0 \Leftrightarrow 2(7+2k)-(-1-k)+3(4+3k)+1=0$$

$$\Leftrightarrow 14k+28=0 \Leftrightarrow k=-\frac{28}{14}=-2$$

Finalement

$$\begin{cases} x=7+2k=7-4=3 \\ y=-1-k=-1+2=1 \\ z=4+3k=4-6=-2 \end{cases}$$

soit $\quad$ H (3 ; 1 ; − 2)

On a $\overrightarrow{DH}=-2\ \vec{n}$ donc $DH=2\ \|\vec{n}\,\|$

et $\|\vec{n}\,\|=\sqrt{4+1+9}=\sqrt{14}$

donc $DH=2\sqrt{14}$ $\approx$ 7,48.

<u>2^e méthode</u> : formule du cours

Si M_0 (x_0 y_0 z_0)

Et Si une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ est

$a\,x+b\,y+c\,z+d=0$, alors on a :

$$\boxed{d\,(M_0\,,\mathcal{P}\,)=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}$$

$$d\,(\,D\,,P\,)=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$d\,(\,D\,,P\,)=\frac{2x_D-y_D+3z_D+1}{\sqrt{2^2+(-1)^2+3^2}}=\frac{14+1+12+1}{\sqrt{4+1+9}}=\frac{28}{\sqrt{14}}=\frac{28\sqrt{14}}{14}=2\sqrt{14}$$

d (D , P) = $2\sqrt{14}$ $\approx$ 7,48.

b. DH > 7 donc l'intersection de P avec la sphère est vide.