Sujet 1 – Exercice 3 – Exp **M13**

Partie A

On considère la fonction g définie sur $[0;+\infty[$ par $g(x) = e^x$.

On note C_g sa courbe représentative dans un repère.

1. Étudier la convexité de la fonction g sur R.

2. Déterminer une équation de la tangente à C_g au point d'abscisse 0.

3. En déduire que pour tout $x \in [0;+\infty[$, on a $e^x - x - 1 \geq 0$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $[0;1]$ par $f(x) = \frac{x}{e^x - x}$.

On note C_f sa courbe représentative dans un repère.

1. Montrer que f est croissante sur $[0;1]$.

2. Montrer que pour tout $x \in [0;1]$, on a $f(x) \in [0;1]$.

3. Soit D la droite d'équation $y = x$.

a. Montrer que pour $x \in [0;1]$, $f(x) - x = \frac{x(-e^x + x + 1)}{e^x - x}$.

b. Étudier la position relative de la droite D et de C_f sur l'intervalle $[0;1]$.

Partie C

On considère la suite (u_n) définie par :

$u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier n.

1. Montrer que pour tout entier naturel n,

$$0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 1.$$

2. En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

3. Compléter le programme ci-contre pour qu'il indique la première valeur de n telle que $u_n < 0{,}1$.

```
from math import*
n=0
u=...
while ... :
    u=u/(math.exp(u)-u)
    ...
print(...)
```

Sujet 1 – Exercice 3 – Exp **M13**

Eléments de correction

Partie A

1. $g''(x) = e^x$ donc $g''(x) > 0$, donc g est convexe sur R.

2. Une équation est $y = x + 1$.

3. D'après la question 1., la courbe représentative de g est située au dessus de sa tangente et en déduire que pour tout $x \in [0; +\infty[$, on a $e^x - x - 1 \geq 0$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $[0; 1]$ par $f(x) = \frac{x}{e^x - x}$.

On note C_f sa courbe représentative dans un repère.

1. $f'(x) = \frac{1\times(e^x - x) - x(e^x - 1)}{(e^x - x)\hat{}2} = \frac{e^x(1-x)}{(e^x - x)\hat{}2}$. Si $x \in [0; 1]$, on a $f'(x) \geq 0$ donc f est croissante sur $[0; 1]$.

2. $f(0) = 0$ et $f(1) = \frac{1}{e-1} < 1$ donc avec la question précédente, on a $f(x) \in [0; 1]$.

3. a. Pour $x \in [0; 1]$, $f(x) - x = \frac{x - x(e^x - x)}{e^x - x} = \frac{x(-e^x + x + 1)}{e^x - x}$.

b. D'après le A 3., $-e^x + x + 1 \leq 0$ et $e^x - x > 0$ donc $f(x) - x \leq 0$ et D est située au dessus de C_f sur l'intervalle $[0; 1]$.

Partie C

On considère la suite (u_n) définie par :

$u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$pour tout entier n.

1. On montre la propriété par récurrence.

$u_1 = f(u_0) = f(1) = \frac{1}{e-1}$. Pour $n = 0$, on a bien $0 \leq u_1 \leq u_0 \leq 1$.

Hérédité : on suppose que pour un certain n, on a $0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 1$.

D'après la question B 1., $f$est croissante sur $[0; 1]$ donc $f(0) \leq f(u_{n+1}) \leq f(u_n) \leq f(1) \leq 1$

D'où $0 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1} \leq 1$: la propriété est héréditaire.

Conclusion : La propriété est vraie pour $n = 0$ et elle se transmet pour tout entier naturel n,

$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$.

2. On déduit de la question précédente que (u_n) est décroissante et minorée par 0.

La suite (u_n) est donc convergente, vers un réel l.

l vérifie $f(l) = l$ d'où $f(l) - l = 0$. Avec la question B.3, on trouve $l = 0$. (u_n) tend donc vers 0.

3. Compléter le programme suivant pour qu'il indique la première valeur de n telle que $u_n < 0{,}1$.

```
from math import*
n=0
u=1
while u>0,1:
    u=u/(math.exp(u)-u)
    n=n+1.
print(n)
```