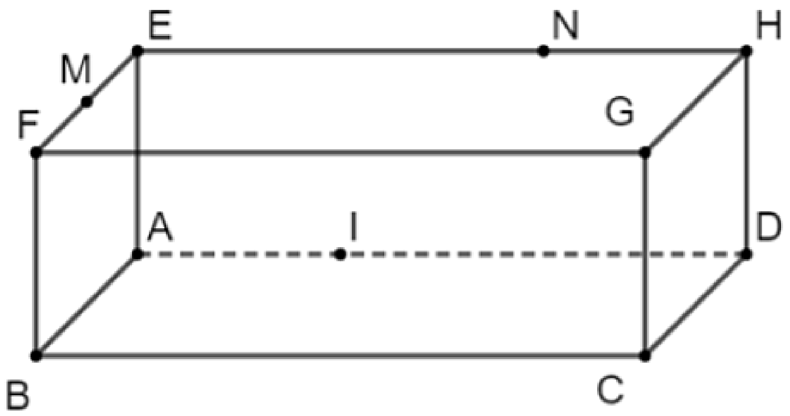
Sujet 2 – Exercice 1 – Espace

On considère le pavé droit ABCDEFGH représenté ci-dessous tel que AB=1, AE=1 et AD=3.



- I est le point tel que $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$.
- M est le milieu de $[EF]$.
- N est le point tel que $\overrightarrow{EN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{EH}$.

On se place dans le repère orthonormé $\left(A; \overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}\right)$.

Par exemple le point N a pour coordonnées $(2; 0; 1)$ dans ce repère.

1. Donner sans justifier les coordonnées de I, M et G dans ce repère.

2. Montrer que les points I, M et N définissent bien un plan.

3.a. Calculer $\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{IN}$.

b. En déduire la nature du triangle IMN.

4.a. Montrer que $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (IMN).

b. Montrer qu'une équation cartésienne de (IMN) est $x + 4y - z - 1 = 0$.

5. On considère le point $C(3; 1; 0)$.

L'objectif de cette question est de déterminer la distance du point C au plan (IMN).

a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite d perpendiculaire au plan (IMN) passant par le point C.

b. Trouver les coordonnées du point H, projeté orthogonal de C sur le plan (IMN).

c. Montrer que la distance de C à (IMN) est égale à $\sqrt{2}$.

6. On rappelle que le volume $\mathcal{V}$ d'un tétraèdre est donné par la formule :

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times (\text{Aire de la base}) \times \text{Hauteur}$$

Calculer le volume de IMNC en prenant le triangle IMN comme base.

CORRIGE

1. On a $\mathrm{I}(1;0;0)$; $\mathrm{M}\left(0;\frac{1}{2};1\right)$ et $\mathrm{G}(3;1;1)$.

2. On a $\overrightarrow{\mathrm{IM}}\begin{pmatrix} x_\mathrm{M}-x_\mathrm{I} \\ y_\mathrm{M}-y_\mathrm{I} \\ z_\mathrm{M}-z_\mathrm{I} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0-1 \\ \frac{1}{2}-0 \\ 1-0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$. De même : $\overrightarrow{\mathrm{IN}}\begin{pmatrix} 2-1 \\ 0-0 \\ 1-0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On remarque que $\frac{-1}{1}\neq\frac{1}{1}$

donc que les coordonnées des deux vecteurs ne sont pas proportionnelles.

Les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{IM}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{IN}}$ ne sont donc pas colinéaires.

Les points I, M et N ne sont donc pas alignés et définissent bien un plan.

3. a. On a : $\overrightarrow{\mathrm{IM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{IN}}=(-1)\times 1+\frac{1}{2}\times 0+1\times 1=0$.

b. Les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{IM}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{IN}}$ sont donc orthogonaux.

Le triangle IMN est donc un triangle rectangle en I.

4. a. Avec $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$, on obtient :

$\overrightarrow{\mathrm{IM}}\cdot\vec{u}=(-1)\times 1+\frac{1}{2}\times 4+1\times(-1)=0$.

$\overrightarrow{\mathrm{IN}}\cdot\vec{u}=1\times 1+0\times 4+1\times(-1)=0$.

Le vecteur $\vec{u}$ est donc orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (IMN).

On en déduit que le vecteur $\vec{u}$ est normal au plan (IMN).

b. Comme $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ normal au plan (IMN),

alors une équation cartésienne de (IMN) est de la forme $x+4y-z+d=0$.

De plus $\mathrm{I}(1;0;0)\in(\mathrm{IMN})$

donc ses coordonnées vérifient l'équation du plan, c'est-à-dire : $x_\mathrm{I}+4y_\mathrm{I}-z_\mathrm{I}+d=0$.

Donc $1+d=0$ soit $d=-1$.

Une équation cartésienne de (IMN) est bien : $x+4y-z-1=0$.

5. a. La droite d est perpendiculaire au plan (IMN) donc le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\4\\-1\end{pmatrix}$, normal à (IMN), est un vecteur directeur de d.

De plus la droite d passe par le point $\mathrm{C}(3;1;0)$.

Une représentation paramétrique de d est donc $\begin{cases}x = 3+t\\ y = 1+4t\\ z = -t\end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

b. H, projeté orthogonal de C sur le plan (IMN), est le point d'intersection de d et de (IMN).

On résout le système :

$$\begin{cases}x = 3+t\\ y = 1+4t\\ z = -t\\ x+4y-z-1=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = 3+t\\ y = 1+4t\\ z = -t\\ 3+t+4(1+4t)-(-t)-1=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = 3+t\\ y = 1+4t\\ z = -t\\ 6+18t=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x = 3-\frac{1}{3} = \frac{8}{3}\\ y = 1+4\times\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3}\\ z = -\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}\\ t = -\frac{1}{3}\end{cases}$$

Le point H a pour coordonnées $\left(\frac{8}{3};-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$.

c. La distance de C à (IMN) est égale à la distance CH. Elle est donc égale à :

$$\mathrm{CH} = \sqrt{(x_\mathrm{H}-x_\mathrm{C})^2+(y_\mathrm{H}-y_\mathrm{C})^2+(z_\mathrm{H}-z_\mathrm{C})^2} = \sqrt{\left(\frac{8}{3}-3\right)^2+\left(-\frac{1}{3}-1\right)^2+\left(\frac{1}{3}-0\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(-\frac{1}{3}\right)^2+\left(-\frac{4}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{18}{9}} = \sqrt{2}.$$

6. L'aire du triangle IMN rectangle en I est $\mathcal{A} = \frac{\mathrm{IM}\times\mathrm{IN}}{2}$.

Or $\mathrm{IM} = \sqrt{(0-1)^2+\left(\frac{1}{2}-0\right)^2+(1-0)^2} = \frac{3}{2}$.

et $\mathrm{IN} = \sqrt{(2-1)^2+(0-0)^2+(1-0)^2} = \sqrt{2}$.

Remarque : à l'aide des coordonnées des vecteurs calculées dans la question **2.**, on aurait pu utiliser $\|\overrightarrow{\mathrm{IM}}\|$ et $\|\overrightarrow{\mathrm{IN}}\|$ pour calculer les longueurs IM et IN.

Donc l'aire du triangle IMN est égale à $\mathcal{A} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$.

On en déduit : $\mathcal{V} = \frac{1}{3}\times\mathcal{A}\times\mathrm{CH} = \frac{1}{3}\times\frac{3\sqrt{2}}{4}\times\sqrt{2} = \frac{1}{2}$ (unités de volume).