Exos — LOIS DISCRETES USUELLES - Loi Binomiale

Exercice 1

Dans un aéroport, les portiques de sécurité servent à détecter les objets métalliques que peuvent emporter les voyageurs.
80 personnes s'apprêtent à passer le portique de sécurité.
On suppose que pour chaque personne la probabilité que le portique sonne est égale à 0,025.
Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de personnes faisant sonner le portique, parmi les 80 personnes de ce groupe.

1°) Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2°) Calculer l'espérance de X et interpréter le résultat.
3°) Calculer l'écart-type de X.
4°) A l'aide de la calculatrice, donner la valeur arrondie à 10^{-3} près, de la probabilité qu'au moins une personne du groupe fasse sonner le portique.

Exercice 2 *On donnera les résultats à 10^{-3} près.*

Une entreprise possède 50 ordinateurs. La probabilité qu'un ordinateur tombe en panne est de 0,01.
On suppose que le fonctionnement d'un ordinateur est indépendant des autres.
On note X la variable aléatoire donnant le nombre d'ordinateurs en panne parmi les 50 disponibles.

1°) Calculer la probabilité qu'aucun ordinateur ne tombe en panne.
2°) Calculer la probabilité que 3 ordinateurs soient en panne.
3°) Calculer la probabilité de l'évènement E : « au moins un ordinateur est en panne »
4°) Calculer la probabilité que 2 ordinateurs au maximum soient en panne.
5°) Calculer la probabilité qu'au moins 4 ordinateurs soient en panne.
6°) Calculer E (X).

Exercice 3

Pour la recherche d'un emploi, une personne envoie sa candidature à 25 entreprises.
La probabilité qu'une entreprise lui réponde est de 0,2 et on suppose que ces réponses sont indépendantes.
Quelle est la probabilité, arrondie au centième, que la personne reçoive au moins 5 réponses ?

Exercice 4 - *On donnera les résultats à 10^{-3} près.*

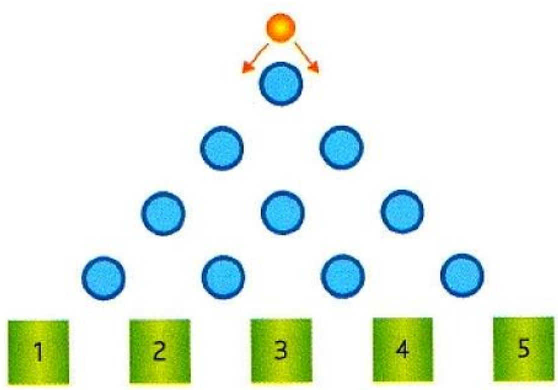
Un certain vaccin provoque chez un individu sur 800 environ une réaction dangereuse.
1°) Quelle probabilité y a-t-il, en vaccinant 3000 personnes, qu'il y ait :
a. trois réactions dangereuses ?
b. plus de deux réactions dangereuses ?
2°) Quel est le nombre moyen de réactions dangereuses dans un groupe de 3000 personnes ?

Exercice 5

Une boule est lancée en haut d'une pyramide.
A chaque obstacle, il y a une chance sur deux pour qu'elle se dirige à droite ou à gauche.

Soit X la variable aléatoire correspondant à la case où la boule tombe à la fin de son parcours.

Déterminer la loi de probabilité de X, ainsi que son espérance E (X).



CORRIGE

Exercice 1 - *loi binomiale* :

Dans un aéroport, les portiques de sécurité servent à détecter les objets métalliques que peuvent emporter les voyageurs.
80 personnes s'apprêtent à passer le portique de sécurité. On suppose que pour chaque personne la probabilité que le portique sonne est égale à 0,025.
Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de personnes faisant sonner le portique, parmi les 80 personnes de ce groupe.

1°) **Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.**
Pour chaque personne qui passe le portique, il y a 2 éventualités : Soit elle fait sonner le portique avec la probabilité $p = 0{,}025$, soit elle ne fait pas sonner (proba $q = 1 - p = 0{,}975$).
Nous sommes donc en présence d'une épreuve de Bernoulli.
On répète de manière identique et indépendante (situation assimilée à un tirage avec remise) 80 fois de suite cette épreuve. Il s'agit d'un schéma de Bernoulli donc la variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres $n = 80$ et $p = 0{,}025$.

2°) **Calculer l'espérance de X et interpréter le résultat.**
L'espérance d'une loi binomiale est : $E(X) = n\,p = 80 \times 0{,}025 = 2$.
Donc par groupe de 80 personnes, le portail sonnera en moyenne 2 fois.

3°) **Calculer l'écart-type de X.**
$V(X) = n\,p\,q = 1{,}95$ donc $\sigma(X) = \sqrt{1{,}95} \simeq 1{,}4$

4°) **A l'aide de la calculatrice, donner la valeur arrondie à 10^{-3} près de la probabilité qu'au moins une personne du groupe fasse sonner le portique.**
$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) \approx 0{,}868$.

Exercice 2 - *loi binomiale* :

Une entreprise possède 50 ordinateurs. La probabilité qu'un ordinateur tombe en panne est de 0,01.
On suppose que le fonctionnement d'un ordinateur est indépendant des autres.
On note X la variable aléatoire donnant le nombre d'ordinateurs en panne parmi les 50 disponibles.

1°) **Calculer la probabilité qu'aucun ordinateur ne tombe en panne.**
On a une épreuve de Bernoulli :
Pour chaque ordinateur, il y a 2 éventualités contraires : « l'ordinateur est en panne » avec une probabilité $p = 0{,}01$ et « l'ordinateur n'est pas en panne » avec une probabilité $q = 1 - p = 0{,}99$.
Ces ordinateurs étant indépendants les uns des autres, la loi de probabilité de X suit la loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0{,}01$, notée aussi $\mathcal{B}(50\,;\,0{,}01)$.
$P(X = 0) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \binom{50}{0} 0{,}01^0 \times 0{,}99^{50} = 0{,}99^{50} \approx 0{,}605$.
On peut utiliser directement la calculatrice bien sûr.

2°) **Calculer la probabilité que 3 ordinateurs soient en panne.**
$P(X = 3) \approx 0{,}012$ *d'après la calculatrice.*

3°) **Calculer la probabilité de l'évènement E : « au moins un ordinateur est en panne ».**
$P(E) = P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) \approx 0{,}395$.

4°) **Calculer la probabilité que 2 ordinateurs au maximum soient en panne.**
$P(X \leq 2) \approx 0{,}986$ *d'après la calculatrice.*

5°) **Calculer la probabilité qu'au moins 4 ordinateurs soient en panne.**
$P(X \geq 4) = 1 - P(X < 4) = 1 - P(X \leq 3) \approx 0{,}002$

6°) **Calculer E (X).**
$E(X) = n\,p = 0{,}5$.

Exercice 3

Pour la recherche d'un emploi, une personne envoie sa candidature à 25 entreprises.
La probabilité qu'une entreprise lui réponde est de 0,2 et on suppose que ces réponses sont indépendantes.
Quelle est la probabilité, arrondie au centième, que la personne reçoive au moins 5 réponses ?

On effectue 25 tirages aléatoires, identiques et indépendants.
À chaque tirage il n'y a que deux issues : l'événement R "l'entreprise lui répond" et $\overline{R}$.
La variable aléatoire X comptant le nombre de réponses suit donc la loi binomiale de paramètres n = 25 et p = 0,2.

$$P(X \geq 5) = 1 - P(X < 5) = 1 - P(X \leq 4) \approx 0{,}58.$$

Exercice 4 - *loi binomiale* - *On donnera les résultats à 10^{-3} près.*

Un certain vaccin provoque chez un individu sur 800 environ une réaction dangereuse.

1°) **Quelle probabilité y a-t-il, en vaccinant 3000 personnes, qu'il y ait :**

a. trois réactions dangereuses ?
Soit X la variable aléatoire indiquant le nombre total de réactions dangereuses. On a une distribution binomiale de paramètres n = 3000 et p = $\frac{1}{800}$.
$P(X = 3) \approx 0{,}207$ *d'après la calculatrice.*

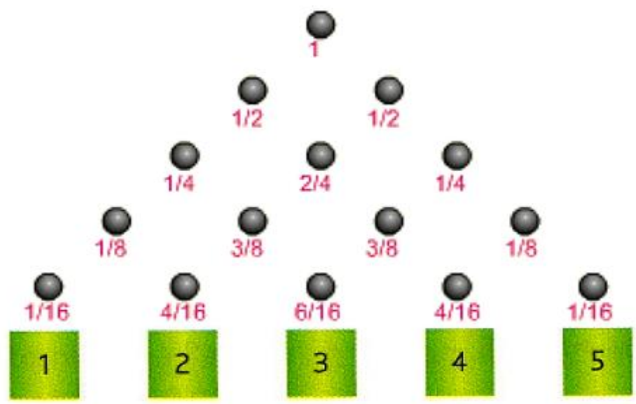
b. plus de deux réactions dangereuses ?
$P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) \approx 0{,}723.$

2°) **Quel est le nombre moyen de réactions dangereuses dans un groupe de 3000 personnes ?**
$E(X) = np = 3{,}75$, soit environ 4 personnes.

Exercice 5 - *loi binomiale cachée*

Une boule est lancée en haut d'une pyramide.
A chaque obstacle, il y a une chance sur deux pour qu'elle se dirige à droite ou à gauche.
Soit X la variable aléatoire correspondant à la case où la boule tombe à la fin de son parcours.

**Déterminer la loi de probabilité de X,
ainsi que son espérance E (X).**



L'ensemble des valeurs possibles de X est :
$X(\Omega) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

Loi de probabilité de X :

x_i	1	2	3	4	5
$P(Y = x_i)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i = \frac{1}{16}\times 1 + \frac{4}{16}\times 2 + \frac{6}{16}\times 3 + \frac{4}{16}\times 4 + \frac{1}{16}\times 5 = \frac{48}{16} = 3.$$

$\boxed{E(X) = 3}$

Attention, X ne suit pas une loi binomiale !
Par contre, la variable D égale au nombre de fois où on va à droite avant de tomber dans une case, suit une loi binomiale de paramètre n = 4 et p = 0,5. On a E(D) = n p = 2

X	1	2	3	4	5
D	4	3	2	1	0

On a : X = 5 – D. Donc E(X) = 5 – E(D) = 5 – 2 = 3.

A savoir :

Schéma de Bernoulli

Un ***schéma de BERNOULLI***
est la répétition de n épreuves de BERNOULLI identiques et indépendantes.

Loi binomiale

La variable aléatoire X donnant le nombre de succès au cours de ces n épreuves suit la ***loi binomiale*** de paramètres n et p, p étant la probabilité de succès.

On note : $X \sim \mathcal{B}(n, p)$.

Ensemble des valeurs possibles : $X(\Omega) = \{0, 1, 2, ..., n\}$

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad \textit{pour } k \in \{0, 1, 2, ..., n\}$$

Coefficient binomial :

$\binom{n}{k}$ est le nombre de chemins de l'arbre réalisant k succès pour n répétitions. On lit « *k* parmi *n* »

Propriétés :

Si X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ *alors* : $E(X) = np$ *et* $V(X) = npq$

Avec $p = 1 - q$

CALCULATRICE - CALCUL de P (X = k) :

TI :	Casio :
On utilise l'instruction **binomFdp(** *que l'on obtient par l'instruction DISTR (touches 2ND VARS) et la touche 0* que l'on complète ainsi : binomFdp(n, p, k).	On utilise le menu STAT, on choisit DIST (touche F5) puis BINM (touche F5), **Bpd** (touche F1) et Var (touche F2). On renseigne la boîte de dialogue : Data : variable ; valeur désirée : k ; Numtrial : n ; probabilité : p.

CALCULATRICE - CALCUL de P (X ≤ k) :

TI :	Casio :
On utilise l'instruction **binomFRép(**	Choisir **Bcd** ...

Savoir calculer la probabilité **P (X = k)** et **P (X ≤ k)** avec la calculette – Tuto Vidéo

- **Calculatrice Ti 82 / 83**
  https://www.youtube.com/watch?v=7k4ZYdfWEY8
- **Calculatrice Casio 35**
  https://www.youtube.com/watch?v=c_ucfqvQf9Q ***(récente)***
  https://www.youtube.com/watch?v=69IQIJ7lyww ***(ancienne)***
- **Calculatrice Numworks**
  https://www.youtube.com/watch?v=RKC2pf35_58