Exercice

Yannick et Xavier jouent aux petits chevaux. Pour pouvoir placer son cheval sur la case de départ, il faut, avec un dé que l'on suppose équilibré, obtenir un 6.
Si on n'obtient pas de 6, on passe son tour.

Partie A *(Loi géométrique tronquée)*

Yannick, qui n'est pas patient, a décidé d'arrêter le jeu au bout de cinq lancers.
Notons Y la variable aléatoire égale au nombre de lancers nécessaires pour obtenir le premier 6.
S'il n'obtient pas de 6 au bout des 5 lancers, alors Y prend la valeur 0.

1°) Calculer la probabilité de placer son cheval sur la case de départ
  a) Au premier lancer, c'est-à-dire P (Y = 1).
  b) Au second lancer.
2°) Faire un arbre pondéré adapté à la situation. Déterminer l'ensemble des valeurs possibles de Y.
3°) Déterminer la loi de probabilité de Y.
4°) Déterminer l'espérance de Y.

Partie B *(Loi géométrique)*

Xavier, qui ne lâche rien, a décidé de continuer le jeu jusqu'à ce qu'il obtienne un 6.
Notons X la variable aléatoire égale au nombre de lancers nécessaires pour obtenir le premier 6.
On note l'évènement S : « obtenir la face 6 ».

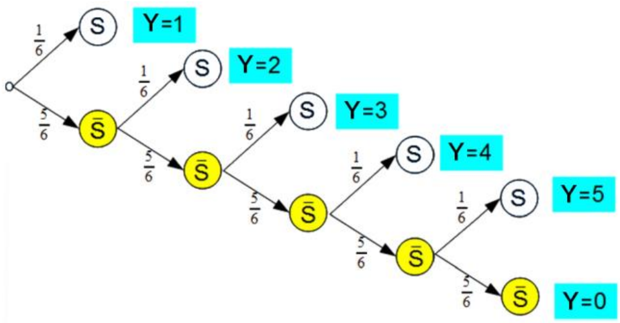
1°) Calculer P (X = 7).
2°) Déterminer l'ensemble des valeurs possibles de X.
3°) Conjecturer P (X = k) pour k entier naturel non nul.

CORRIGE

Partie A *(Loi géométrique tronquée)*

1°) a) P (Y = 1) = $\frac{1}{6}$. b) P (Y = 2) = $\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{5}{36}$.

2°) Arbre pondéré adapté à la situation.



L'ensemble des valeurs possibles de Y est :

Y (Ω) = {0, 1, 2, 3, 4, 5}

3°) Loi de probabilité de Y.

y_i	0	1	2	3	4	5
$P(Y=y_i)$	$\left(\frac{5}{6}\right)^5\times\frac{1}{6}=\frac{15625}{279936}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{5}{36}$	$\left(\frac{5}{6}\right)^2\times\frac{1}{6}=\frac{25}{216}$	$\left(\frac{5}{6}\right)^3\times\frac{1}{6}=\frac{125}{1296}$	$\left(\frac{5}{6}\right)^4\times\frac{1}{6}=\frac{625}{7776}$

4°) E (Y) = $\sum_{i=1}^{n} p_i\, y_i = \frac{25}{46656}\times0+\frac{1}{6}\times1+\frac{5}{36}\times2+\frac{25}{216}\times3+\frac{125}{1296}\times4+\frac{625}{7776}\times5=\frac{12281}{7776}\approx1,58$.

Partie B *(Loi géométrique)*

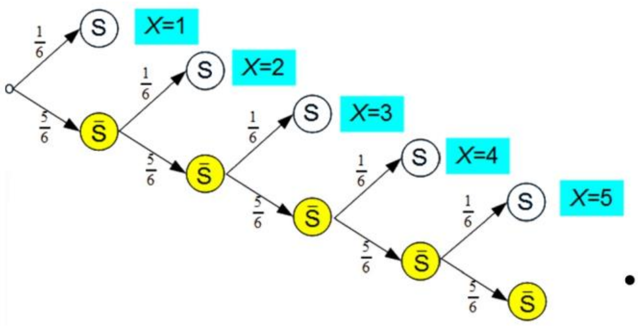
1°) P (X = 7) = $\left(\frac{5}{6}\right)^6\times\frac{1}{6}=\frac{15625}{279936}\simeq0,056$.

2°) Ensemble des valeurs possibles de X :

X (Ω) = {1, 2, 3, 4, 5, 6 …} = ℕ*

3°) Conjecture :

P (X = k) = $\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}\times\frac{1}{6}$ pour *k* entier non nul.



Pour info : On dit que *X* suit une **loi géométrique de paramètre** *p*.

Loi géométrique

La loi géométrique est une **loi de probabilité** discrète qui modélise l'observation du nombre d'épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes devant se succéder pour espérer un premier succès.
Elle n'a donc qu'un paramètre, la probabilité de **succès *p***.
De cette probabilité découle celle d'un échec, $q = 1 - p$.
Le fait qu'une variable aléatoire *X* suive une loi géométrique de paramètre *p* s'écrit X ~ $\mathcal{G}(p)$

Ensemble des valeurs possibles : X (Ω) = {1, 2, 3, 4, 5, 6 …} = ℕ*

La probabilité de remporter un premier succès à l'épreuve *k* entier naturel non nul est égale à :
P (X = k) = $p\,q^{k-1}$

On admet que : $E(X)=\frac{1}{p}$ *et* $V(X)=\frac{q}{p^2}$