Exercice 1

On lance un dé en forme de tétraèdre régulier, dont les faces sont numérotées de 1 à 4.
Pour info : Lorsque le dé repose sur une surface plane après un jet, un seul des trois nombres est vertical, le même sur les trois faces visibles, c'est le résultat du lancer.

On note X la variable aléatoire égale au chiffre obtenu.
Déterminer la loi de probabilité de X, et son espérance mathématique.

Exercice 2

Ernest rentre d'une soirée bien arrosée … Il dispose de 5 clefs dont une seule ouvre la porte de son domicile, mais il ne sait plus laquelle.

Il essaie les clefs les unes après les autres en éliminant après chaque essai la clef qui n'a pas convenu.
Déterminer la loi de probabilité de X.
Calculer le nombre moyen d'essais nécessaires pour trouver la bonne clef.

CORRIGE

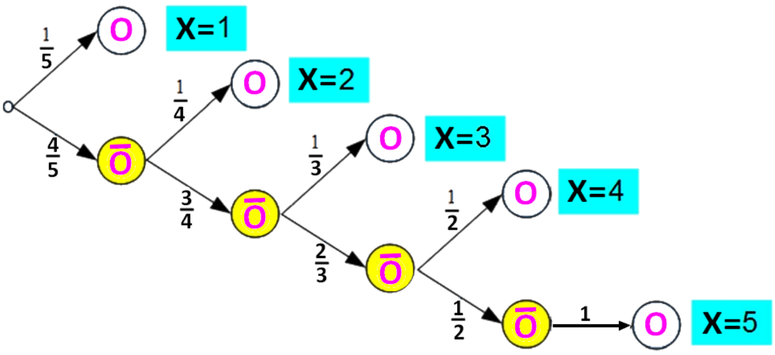
Exercice 1 - *loi uniforme* :

X suit une loi uniforme discrète. X (Ω) = {1, 2, 3, 4}

P (X = 1) = P (X = 2) = P (X = 3) = P (X = 4) = $\frac{1}{4}$

E (X) = $\frac{n+1}{2} = \frac{4+1}{2} = 2,5$

Exercice 2 - *loi uniforme* :



L'ensemble des valeurs possibles de X est :

X (Ω) = {1, 2, 3, 4, 5}

O : « *La clé ouvre la porte* »

Loi de probabilité de X :

x_i	1	2	3	4	5
$P(Y = x_i)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$

En effet, en utilisant l'arbre, on a : P (X = 1) = $\frac{1}{5}$; P (X = 2) = $\frac{4}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{5}$; P (X = 3) = $\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{5}$;

P (X = 4) = $\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{5}$; P (X = 5) = $\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times 1=\frac{1}{5}$.

X suit donc une **loi uniforme discrète**, ce qui n'était pas évident à voir sans les calculs.

E (X) = $\frac{n+1}{2} = \frac{5+1}{2} = 3$

Le nombre moyen d'essais nécessaires pour trouver la bonne clef est donc 3.

A savoir :

Loi uniforme discrète

On appelle **loi uniforme discrète**, ou encore **loi équirépartie**,
toute loi d'une variable aléatoire X qui peut prendre n valeurs avec une probabilité identique.

Ensemble des valeurs possibles : X (Ω) = { $x_1, x_2, \ldots, x_n$ }

$$P (X = x_1) = P (X = x_2) = \ldots = P (X = x_n) = \frac{1}{n}$$

Pour info : ***Propriétés*** – *Cas particulier*

Si X suit une loi uniforme sur X (Ω) = { 1, 2, … , n } *alors* :

$$E (X) = \frac{n+1}{2}$$ *et* $$V (X) = \frac{n^2-1}{12}$$