

I - INTERVALLE DE FLUCTUATION

Rappels de cours:

En classe de seconde

p est la proportion du caractère étudié au sein de la population.

Pour un échantillon de taille n , l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % est :

$$\left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}; p + \frac{1}{\sqrt{n}} \right].$$

Conditions : $0,2 \leq p \leq 0,8$ et $n \geq 25$

En classe de première

On note X la variable aléatoire qui compte le nombre d'individus de l'échantillon présentant le caractère étudié. X suit la loi binomiale $B(n, p)$.

Pour un échantillon de taille n , l'intervalle de fluctuation au

seuil de 95 % est : $\left[\frac{a}{n}; \frac{b}{n} \right],$

où a et b sont les plus petits entiers tels que :

$$P(X \leq a) > 0,025 \text{ et } P(X \leq b) \geq 0,975.$$

II - INTERVALLE DE FLUCTUATION ASYMPTOTIQUE D'UNE PROPORTION

Propriété

Soit X_n une variable aléatoire suivant une loi binomiale $B(n, p)$;

Alors, pour tout α de $]0; 1[$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(F_n \in I_n) \geq 1 - \alpha$

où I_n désigne l'intervalle $I_n = \left[p - u_\alpha \times \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}; p + u_\alpha \times \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right].$

Rappel : Le réel u_α a été défini par l'égalité $P(-u_\alpha \leq T \leq u_\alpha) = 1 - \alpha$, où T suit la loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

$$P(-u_\alpha \leq T \leq u_\alpha) = 1 - \alpha \Leftrightarrow 2P(T \leq u_\alpha) - 1 = 1 - \alpha \Leftrightarrow P(T \leq u_\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{2}$$

On connaît les valeurs suivantes :

Si $\alpha = 0,05$ alors $u_\alpha = 1,96$

Si $\alpha = 0,01$ alors $u_\alpha = 2,58$

Sinon, avec la calculatrice TI : $u_\alpha = \text{FracNormale}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$

Définition

L'intervalle $I_n = \left[p - u_\alpha \times \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}; p + u_\alpha \times \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right]$ est un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de confiance $1 - \alpha$ de la variable fréquence F_n qui, à tout échantillon de taille n , associe la fréquence obtenue.

Ne pas oublier d'arrondir la borne inférieure par défaut et la borne supérieure par excès !

cas particulier (cas où $n \geq 30$, $np \geq 5$ et $n(1-p) \geq 5$)

$\left[p - 1,96 \times \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}; p + 1,96 \times \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right]$ est un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de confiance 0,95 de la fréquence F_n d'un caractère dans un échantillon de taille n .

Prise de décision à partir d'un échantillon

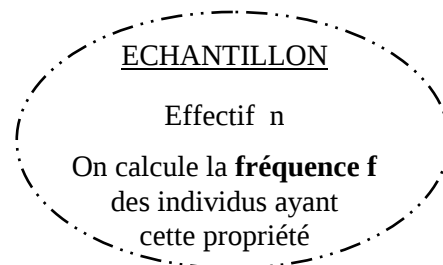
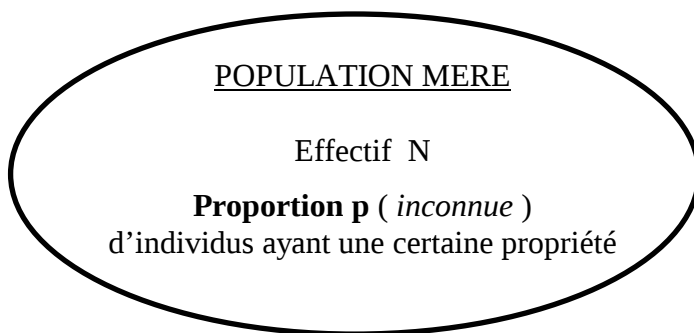
Dans une certaine population, on **suppose** que la proportion d'un certain caractère est p . La prise de décision consiste, à partir d'un échantillon de taille n , à valider ou non cette hypothèse faite sur la proportion p .

Pour ce faire :

- On calcule la fréquence observée f du caractère étudié.
- On détermine l'intervalle de fluctuation asymptotique I au seuil 0,95.
- On applique la règle de décision suivante :

- ◆ Si $f \in I$, alors on accepte l'hypothèse faite sur la proportion p .
- ◆ Si $f \notin I$, alors on rejette l'hypothèse faite sur la proportion p , avec un risque de 5% de se tromper.

III - ESTIMATION



α seuil de risque .

Propriété

Soit X_n une variable aléatoire suivant la loi binomiale $B(n, p)$ et $F_n = \frac{X_n}{n}$.

Alors, pour tout p de $]0; 1[$, l'intervalle $\left[F_n - \frac{1}{\sqrt{n}}; F_n + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$ contient, pour n assez grand, la proportion p , avec une probabilité supérieure ou égale à 0,95.

INTERVALLE DE CONFIANCE D'UNE PROPORTION *Définition*

Soit f la fréquence observée d'un caractère dans un échantillon de taille n ,
extrait d'une population dans laquelle la proportion du caractère est p (inconnue) ;
 $\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}; f + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$ est un intervalle de confiance de la proportion inconnue p ,
avec un niveau de confiance 0,95.

On utilise cet intervalle dès que $n \geq 30$, $n \times f \geq 5$ et $n \times (1 - f) \geq 5$

Taille minimale de l'échantillon pour avoir une précision donnée

Avec un niveau de confiance de 0,95, l'amplitude de l'intervalle est $\frac{2}{\sqrt{n}}$. Si l'on souhaite situer p dans un intervalle de longueur donnée L , alors on doit avoir $\frac{2}{\sqrt{n}} \leq L$, soit $n \geq \frac{4}{L^2}$