

ENONCE :*C'est le printemps !*

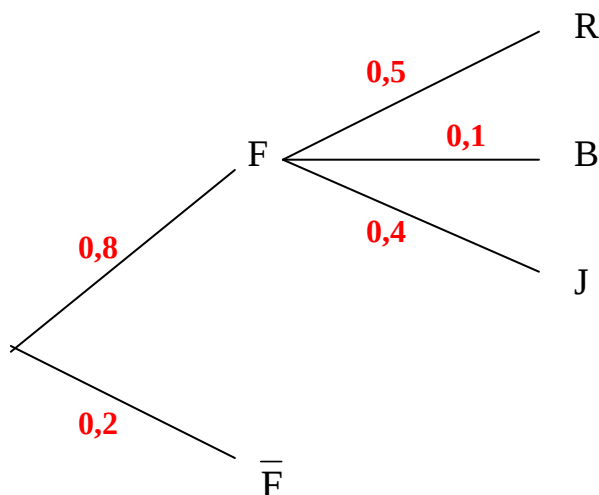
Un lot de tulipes a un pouvoir germinatif de 80% ; cela signifie que l'on considère que chaque bulbe a une probabilité égale à $\frac{4}{5}$ de produire une fleur et cela indépendamment des autres bulbes.

Chaque bulbe contient l'un des trois gènes R (rouge), B (blanc) et J (jaune) qui détermine la couleur de la future fleur éventuelle.

On suppose que la probabilité pour qu'un bulbe possède le gène R est $\frac{1}{2}$, la probabilité pour qu'un bulbe possède le gène B est $\frac{1}{10}$, et la probabilité pour qu'un bulbe possède le gène J est $\frac{2}{5}$.

1. a. Tracer un arbre pondéré traçant la floraison d'un bulbe.
b. Quelle est la probabilité pour qu'un bulbe planté produise une fleur rouge ?
c. Quelle est la probabilité pour qu'un bulbe planté produise une fleur blanche ?
2. On appelle X la variable aléatoire qui associe le nombre k de fleurs rouges obtenues après avoir planté 5 bulbes.
a. Déterminer la loi de probabilité de X.
b. Calculer $E(X)$.
3. Soit n un entier supérieur ou égal à 1.
On désigne par p_n la probabilité de n'obtenir aucune tulipe blanche après avoir planté n bulbes. Calculer p_n .
4. Combien de bulbes doit-on planter, au minimum, pour obtenir au moins une tulipe blanche, avec une probabilité supérieure ou égale à $\frac{19}{20}$?

1. a.



b. $p(F \cap R) = p(F) \times p_F(R) = 0,8 \times 0,5 = 0,4$.

c. $p(F \cap B) = p(F) \times p_F(B) = 0,8 \times 0,1 = 0,08$.

2.a. Pour chaque bulbe, il y aura 2 éventualités : soit cela donnera une fleur rouge (probabilité $p = 0,4$), soit une autre couleur.

On plante 5 bulbes, donc cela revient à répéter de manière identique l'expérience : « planter un bulbe »
Les épreuves sont indépendantes les unes des autres.

X (nombre de succès) suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0,4$.

$$p(X = 0) = \binom{5}{0} (0,4)^0 \times (0,6)^5 = 0,07776, \quad p(X = 1) = \binom{5}{1} (0,4)^1 \times (0,6)^4 = 0,2592,$$

$$p(X = 2) = \binom{5}{2} (0,4)^2 \times (0,6)^3 = 0,3456, \quad p(X = 3) = \binom{5}{3} (0,4)^3 \times (0,6)^2 = 0,2304,$$

$$p(X = 4) = \binom{5}{4} (0,4)^4 \times (0,6)^1 = 0,0768, \quad p(X = 5) = \binom{5}{5} (0,4)^5 \times (0,6)^0 = 0,01024.$$

$X = x_i$	0	1	2	3	4	5
$p(X = x_i)$	0,0776	0,2592	0,3456	0,2304	0,0768	0,01024

b. $E(X) = \sum_{i=1}^5 p_i \times x_i = 2$.

Ou encore, pour une loi binomiale $E(X) = n p = 2$

3. X (nombre de fleurs blanches) suit donc une loi binomiale de paramètres n et $p = 0,08$

On a répété n fois l'expérience, et on n'a obtenu aucune fleur blanche :

$$p_n = p(X = 0) = \binom{n}{0} (0,08)^0 \times (0,92)^n = (0,92)^n$$

4. Le contraire de "au moins une fleur blanche" est "aucune fleur blanche" :

Cette probabilité est donc $p = 1 - p_n = 1 - 0,92^n$.

Il faut donc que :

$$1 - 0,92^n \geq \frac{19}{20} \Leftrightarrow 0,92^n \leq 1 - \frac{19}{20} \Leftrightarrow 0,92^n \leq \frac{1}{20} \Leftrightarrow \ln 0,92^n \leq \ln \frac{1}{20} \Leftrightarrow n \ln 0,92 \leq -\ln 20 \Leftrightarrow n \geq \frac{-\ln 20}{\ln 0,92} \approx 35,9$$

On doit donc planter au minimum 36 fleurs pour avoir une probabilité supérieure à 19/20 d'obtenir une fleur blanche.