Mémo — Suites numériques

DIVERS MODES DE DEFINITION DE SUITES

Formule explicite

$\boxed{U_n = f(n)}$

Exemple : Pour tout n, $U_n = n^2 + 3$

Relation de récurrence

$\boxed{U_{n+1} = f(U_n)}$

Exemple : $U_0 = 3$ et pour tout n, $U_{n+1} = 2\,U_n - 4$

On peut également trouver d'autres types de relation de récurrence comme :

$\boldsymbol{U_{n+1} = f(U_n\,, n)}$ (*Exemple* : $U_{n+1} = U_n - 3n$)

ou $\boldsymbol{U_{n+2} = f(U_{n+1}\,, U_n)}$ (*Exemple* : $U_{n+2} = 2\,U_{n+1} - U_n$)

SUITES PARTICULIERES

	SUITES ARITHMETIQUES	SUITES GEOMETRIQUES
Définition	Une suite ***arithmétique*** est définie par la relation de récurrence $U_{n+1} = U_n + r$, où r est la raison.	Une suite ***géométrique*** est définie par la relation de récurrence $U_{n+1} = qU_n$, où $q \neq 0$ est la raison.
Propriété caractéristique	$U_n = U_0 + nr$	$U_n = q^n U_0$
	Si la suite est définie à partir d'un rang n_0 : $U_n = U_{n_0} + (n - n_0)r$	Si la suite est définie à partir d'un rang n_0 : $U_n = q^{n-n_0} U_{n_0}$
Somme particulière	$s_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$	$\sigma_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$ *avec* $q \neq 1$
Somme des n+1 premiers termes	$S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \ldots + U_n = (n+1)\dfrac{U_0 + U_n}{2}$	$S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \ldots + U_n = U_0 \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$ *avec* $q \neq 1$

SENS DE VARIATION D'UNE SUITE

Déf : La suite (U_n) est ***croissante*** (resp. ***décroissante***) à partir du rang n_0 si , pour tout entier $n \geq n_0$ on a $U_n \leq U_{n+1}$ (resp. $U_n \geq U_{n+1}$) .

Déf : La suite (U_n) est ***constante*** à partir du rang n_0 si , pour tout entier $n \geq n_0$, on a $U_{n+1} = U_n$.

Déf : Une suite est ***monotone*** si elle est croissante ou si elle est décroissante.

TECHNIQUES

a) **Signe de** $U_{n+1} - U_n$.

b) **Comparaison de** $\dfrac{U_{n+1}}{U_n}$ **avec 1 , dans le cas où** $U_n > 0$.

c) **Technique fonctionnelle** (cas où $U_n = f(n)$) .

Th : Soient $n_0 \in \mathbf{N}$ et $U_n = f(n)$; Si f est croissante (*resp.* décroissante) sur [n_0, $+\infty$ [, alors la suite (U_n) est croissante (*resp.* décroissante) à partir du rang n_0.

d) **Raisonnement par récurrence**.

SUITES MAJOREES, SUITES MINOREES

Déf : La suite (U_n) est ***majorée*** s'il existe un réel M tel que, pour tout entier n, on a $U_n \leq M$.

Ce nombre M est appelé ***majorant*** de la suite (U_n).

Déf : La suite (U_n) est ***minorée*** s'il existe un réel m tel que, pour tout entier n, on a $U_n \geq m$.

Ce nombre m est appelé ***minorant*** de la suite (U_n).

Déf : Une suite est ***bornée*** si elle est à la fois majorée et minorée.

CAS DES SUITES NON MAJOREES OU NON MINOREES

Par négation, la suite (U_n) est ***non majorée*** si quel que soit le réel A, aussi grand soit-il, on peut trouver un terme U_N tel que, $U_N > A$.

TECHNIQUES

a) **Signe de** $U_n - m$ **ou de** $U_n - M$.
b) **Technique fonctionnelle** (cas où $U_n = f(n)$). On étudie les extrema de f.
c) **Raisonnement par récurrence**.
d) **A l'aide d'encadrements.**

LIMITE D'UNE SUITE - CONVERGENCE , DIVERGENCE

Déf : La suite (U_n) admet une ***limite*** si et seulement si U_n admet une limite lorsque n tend vers $+\infty$.

Déf : On dit qu'une suite ***converge*** si elle admet une limite finie.
On dit qu'une suite ***diverge*** si elle ne converge pas.

Th : *Suite géométrique* :

Soit $q \neq 0$; $\lim_{n \to +\infty} q^n = \begin{cases} +\infty & si \quad q > 1 \\ 1 & si \quad q = 1 \\ 0 & si \quad -1 < q < 1 \\ pas\ de\ limite & si \quad q \leq -1 \end{cases}$

Suite arithmétique :

Une suite arithmétique diverge

TECHNIQUES

a) **Opérations sur les limites**

b) **Théorème des Gendarmes**

Th : **Si à partir d'un certain rang,** $x_n \leq U_n \leq y_n$
et si (x_n) **et** (y_n) **convergent vers la même limite** ℓ , **alors** (U_n) **tend vers** ℓ

c) **Technique fonctionnelle** (cas où $U_n = f(n)$).

Th : **Si** $U_n = f(n)$ **alors la suite** (U_n) **a la même limite que** f **en** $+\infty$

THEOREMES

Th1 Toute suite croissante et majorée converge
Th2 Toute suite décroissante et minorée converge
Th3 Toute suite croissante NON majorée a pour limite $+\infty$
Th4 Toute suite décroissante NON minorée a pour limite $-\infty$