Mémo — SUITES NUMERIQUES

SUITES ARITHMETIQUES

Déf: Une suite ***arithmétique*** est définie par la relation de récurrence $U_{n+1} = U_n + r$, où r est la raison.

Propriété : $U_n = U_0 + n\,r$

Somme des n premiers entiers naturels non nuls : $s_n = 1+2+3+\ldots+(n-1)+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Somme des n+1 premiers termes d'une suite arithmétique : $S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \ldots + U_n = (n+1)\dfrac{U_0 + U_n}{2}$

SUITES GEOMETRIQUES

Déf : Une suite ***géométrique*** est définie par la relation de récurrence $U_{n+1} = qU_n$, où q≠0 est la raison.

Propriété : $U_n = q^n U_0$ ou si la suite est définie à partir d'un rang n_0 : $U_n = q^{n-n_0} U_{n_0}$

Somme des puissances d'un nombre :
Pour $q \neq 1$, on a : $\sigma_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$

Somme des n+1 premiers termes d'une suite géométrique :
Pour $q \neq 1$, on a : $S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \ldots + U_n = U_0 \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$

SENS DE VARIATION D'UNE SUITE

Déf : La suite (U_n) est ***croissante*** (resp. ***décroissante***) à partir du rang n_0 si ,
pour tout entier $n \geq n_0$ on a $U_n \leq U_{n+1}$ (resp. $U_n \geq U_{n+1}$) .

Déf : La suite (U_n) est ***constante*** à partir du rang n_0 si , pour tout entier $n \geq n_0$, on a $U_{n+1} = U_n$.

Déf : Une suite est ***monotone*** si elle est croissante ou si elle est décroissante.

TECHNIQUES

a) **Signe de** $U_{n+1} - U_n$.

b) **Comparaison de** $\dfrac{U_{n+1}}{U_n}$ **avec 1 , dans le cas où** U_n **> 0** .

c) **Technique fonctionnelle** (cas où $U_n = f(n)$) .

TH : **Soit** $U_n = f(n)$ **;**
Si f **est croissante (** ***resp.décroissante*** **) alors la suite** (U_n) **est croissante (** ***resp.décroissante*** **)**

d) **Raisonnement par récurrence**.

SUITES MAJOREES , SUITES MINOREES

Déf : La suite (U_n) est ***majorée*** s'il existe un réel M tel que , pour tout entier n , on a $U_n \leq M$.
Ce nombre M est appelé ***majorant*** de la suite (U_n) .

Déf : La suite (U_n) est ***minorée*** s'il existe un réel m tel que , pour tout entier n , on a $U_n \geq m$.

Ce nombre m est appelé ***minorant*** de la suite (U_n).

Déf : Une suite est ***bornée*** si elle est à la fois majorée et minorée .

TECHNIQUES

a) **Signe de** $U_n - m$ **ou de** $U_n - M$.
b) **Technique fonctionnelle** (cas où $U_n = f(n)$) . On étudie les extrema de f .
c) **Raisonnement par récurrence**.
d) **A l'aide d'encadrements.**

LIMITE D'UNE SUITE - CONVERGENCE , DIVERGENCE

Déf : La suite (U_n) admet une ***limite*** si et seulement si U_n admet une limite lorsque n tend vers + ∞.

Déf : On dit qu'une suite ***converge*** si elle admet une limite finie.
On dit qu'une suite ***diverge*** si elle ne converge pas.

TH :

Suite géométrique :

Soit $q \neq 0$; $$\lim_{n\to+\infty} q^n = \begin{cases} +\infty & si \quad q > 1 \\ 1 & si \quad q = 1 \\ 0 & si \quad -1 < q < 1 \\ pas\ de\ limite & si \quad q \leq -1 \end{cases}$$

Suite arithmétique :

Une suite arithmétique diverge

TECHNIQUES

a) **Opérations sur les limites**

b) **Théorème des Gendarmes**

TH : **Si à partir d'un certain rang,** $x_n \leq U_n \leq y_n$
et si (x_n) **et** (y_n) **convergent vers la même limite** ℓ , **alors** (U_n) **tend vers** ℓ

c) **Technique fonctionnelle** (cas où $U_n = f(n)$) .

TH : **Si** $U_n = f(n)$ **alors la suite** (U_n) **a la même limite que** f **en + ∞ .**

THEOREMES

TH1 Toute suite croissante et majorée converge
TH2 Toute suite décroissante et minorée converge

TH3 Toute suite croissante NON majorée a pour limite $+\infty$
TH4 Toute suite décroissante NON minorée a pour limite $-\infty$

SUITES ADJACENTES

Déf : Deux suites (U_n) et (V_n) sont ***adjacentes***

si l'une d'entre elles est croissante, l'autre décroissante, et si $\lim_{n\to+\infty}(U_n - V_n) = 0$.

Propriété : **Si deux suites sont *adjacentes* alors elles sont convergentes et ont la même limite**