ENONCE :

Déterminer les variations de la suite (u_n), dite *harmonique*, définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \dfrac{1}{n}$, en comparant ses termes :

a. à l'aide d'une différence ;

b. à l'aide d'un quotient.

Eléments de correction

a. Méthode de la différence de deux termes consécutifs

Pour tout nombre entier naturel n non nul, on a :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$$
$$= \frac{n-(n+1)}{n(n+1)} = \frac{n-n-1}{n(n+1)} = \frac{-1}{n(n+1)}.$$

On sait que n est un nombre entier naturel non nul, donc $n > 0$ et $n + 1 > 0$.

Donc $u_{n+1} - u_n = \dfrac{-1}{n(n+1)} < 0$.

Pour tout nombre entier naturel n non nul, on a donc :

$$u_{n+1} - u_n < 0 \Leftrightarrow u_{n+1} < u_n.$$

On en déduit que la suite (u_n) est strictement décroissante sur $\mathbb{N}^*$.

b. Méthode du quotient de deux termes consécutifs

On sait que n est un nombre entier naturel non nul, donc $n > 0$.

Alors, pour tout nombre entier naturel non nul n : $u_n = \dfrac{1}{n} > 0$.

Pour tout nombre entier naturel non nul n, on a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n+1} \times \frac{n}{1} = \frac{n}{n+1} = \frac{n+1}{n+1} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} < 1.$$

En effet, $n > 0$, donc $n + 1 > 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{n+1} > 0 \Leftrightarrow -\dfrac{1}{n+1} < 0 \Leftrightarrow 1 - \dfrac{1}{n+1} < 1$.

On en déduit que la suite (u_n) est strictement décroissante sur $\mathbb{N}^*$.