Cours	COMBINATOIRE - DENOMBREMENT

I – NOTIONS ENSEMBLISTES

1°) PARTIE ou SOUS-ENSEMBLE

Soit E un ensemble donné.

A est une partie (ou un sous-ensemble) de E si tout élément de A est élément de E.

On note : $A \subset E$.

Exemple : Soit E = {1, 2, 3}.

→ E contient 8 parties : ∅, {1}, {2}, {3}, {1,2}, {1,3}, {2,3}, {1,2,3}.

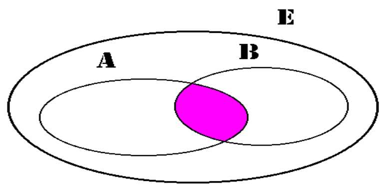
Propriété 1 :

> Le nombre de parties d'un ensemble à n éléments est 2^n.

2°) ENSEMBLE VIDE

On le note ∅ ou { }. Il ne possède aucun élément. *On a* : $\emptyset \subset E$.

3°) INTERSECTION DE DEUX ENSEMBLES



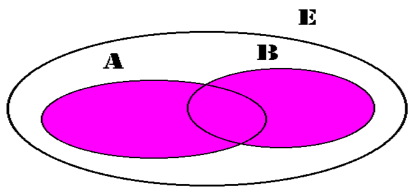
$A \subset E$, $B \subset E$.

$A \cap B$ est l'ensemble des éléments x de E tels que $x \in A$ et $x \in B$.

Exemple : Soient A = {1, 2, 3, 4, 5, 6} et B = {1, 3, 5, 7, 9}. Déterminer $A \cap B$.

→ $A \cap B$ = { 1, 3, 5 }.

4°) REUNION DE DEUX ENSEMBLES



$A \subset E$, $B \subset E$.

$A \cup B$ est l'ensemble des éléments x de E tels que $x \in A$ ou $x \in B$.

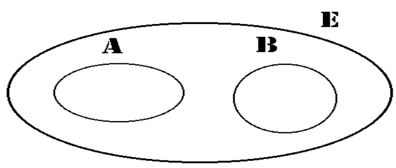
On utilise ici le « ou inclusif ».

Exemple : Déterminer $A \cup B$.

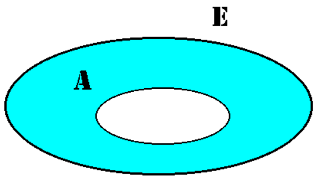
→ $A \cup B$ = { 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9 }.

5°) ENSEMBLES DISJOINTS

A et B sont disjoints ssi $A \cap B = \emptyset$.



6°) COMPLEMENTAIRE D'UN ENSEMBLE



$A \subset E$.

$\overline{A}$ est l'ensemble des éléments x de E tels que $x \in E$ et $x \notin A$.

7°) CARDINAL D'UN ENSEMBLE

Définition :

Le cardinal d'un ensemble fini E, noté card (E), est le nombre d'éléments de E.

Exemple : Le cardinal de l'ensemble E = { a,b,c } est card (E) = 3.

Remarque : $\mathbb{N}$ est un ensemble infini, tout comme $\mathbb{R}$.

Propriété 2 :

Soient A et B deux ensembles finis (*c.à.d. possédant un nombre fini d'éléments*).

$$\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$$

8°) PRODUIT CARTESIEN – k-uplet

Définition :

Le produit cartésien de deux ensembles finis E et F, noté $E \times F$, est l'ensemble des couples (x,y), où x est un élément de E et y un élément de F.

Exemple : Soient E = {a, b} et F = {1, 2, 3}.

→ $E \times F = \{ (a,1), (a,2), (a,3), (b,1), (b,2), (b,3) \}$

	1	**2**	**3**
a	(a,1)	(a,2)	(a,3)
b	(b,1)	(b,2)	(b,3)

Définition :

Le produit cartésien de k ensembles finis $E_1, E_2, \ldots, E_k$, noté $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_k$, est l'ensemble des listes ordonnées $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$,

où x_i est un élément de E_i pour i variant de 1 à k. (*k entier naturel non nul*).

Cas particulier : L'ensemble $E \times E \times \ldots \times E$, noté E^k.

9°) k-uplet *ou* k-liste

Définition :

$(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ est appelé **k-uplet**, ou **k-liste**.

Remarque : Un 2-uplet est un couple et un 3-uplet est un triplet.

Les ordres suivants portent ces noms : *quadruplet*, *quintuplet*, *sextuplet*, etc.

Etymologie : *Le suffixe « uplet » est une extension du suffixe multiplicatif « -uple » ou « -iple » que l'on trouve dans les mots tels que triple, quadruple, quintuple, etc. et dans le mot dupliquer. L'origine indo-européenne de ce suffixe signifie « plié » ou « dupliqué ». Ainsi, pour quadrupler quelque chose, on doit le multiplier par 4.*

II - PRINCIPES ADDITIFS ET MULTIPLICATIFS

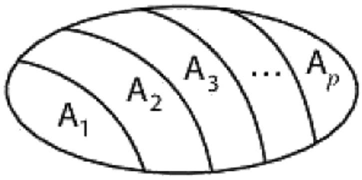
1°) Principe additif

Propriété 3 :

Si A et B sont deux ensembles finis et **disjoints**,
alors card $(A \cup B)$ = card (A) + card (B)

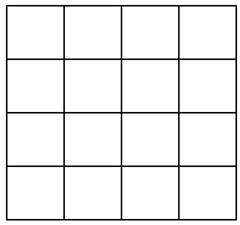
Propriété 3G:

Si $A_1, A_2, \ldots, A_p$ sont des ensembles finis
et **disjoints deux à deux**,



alors : card $(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_p)$ = card (A_1) + card (A_2) + . . . + card (A_p).

Exemple : Nombre de carrés dans le quadrillage 4x4 ci-contre



→ On compte 16 carrés de côté 1, 9 carrés de côté 2,
4 carrés de côté 3 et 1 carré de côté 4.
Donc : N = 16 + 9 + 4 +1 = **30**.

2°) Principe multiplicatif

Propriété 4 :

Si E et F sont des ensembles finis, alors : Card $(E \times F)$ = Card $(E) \times$ Card (F).

Propriété 4G – Généralisation :

Si $E_1, E_2, \ldots, E_p$ sont des ensembles finis, alors :
card $(E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_p)$ = card $(E_1) \times$ card $(E_2) \times \ldots$ card (E_p).

Exemple : Dans un restaurant, la carte propose 5 entrées, 3 plats et 4 desserts.
On peut composer 5 x 3 x 4 = **60** menus différents.

III - DENOMBREMENT

Dénombrer, c'est compter des objets.
Ces objets sont créés à partir d'un ensemble E.
Les objets que l'on peut former sont
*soit des **listes** d'éléments de E, soit des **sous-ensembles** de E.*

On peut, pour dénombrer, s'aider de représentations graphiques (diagramme de Venn, arbre, tableau croisé …), ou de formules (à venir …).

« Ne pas dénombrer les raisons de vivre : le bonheur n'est pas cartésien ».

Jean Rostand ; Les inquiétudes d'un biologiste (1967)

1°) Activité A_1 Voir feuille annexe.

2°) Factorielles

Définition :

Soit n un entier naturel non nul. On note $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 1$.

Par convention : $0! = 1$

Exemple : $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$.

3°) Dénombrer des k-uplets (ou k-listes) d'un ensemble fini E

a) Listes

Définition :

Soit E un ensemble fini à n éléments et k un nombre entier naturel non nul.

On appelle **k-liste** tout **k-uplet** de E^k de la forme $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ constitué de k éléments de E, distincts ou confondus.

... Autrement dit, un élément de E^k...

Propriété 5 :

Le nombre de k-listes d'un ensemble E à n éléments est n^k.

Exemple :

Un code à 4 chiffres est un 4-uplet de l'ensemble E = { 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 }.

→ Il y a 10^4 = 10 000 codes possibles.

b) Arrangements - permutations

Définition ($k \le n$) : cas ❷ - Activité 1

Soient E un ensemble fini à n éléments ($n \ge 1$) et k un entier non nul tel que $k \le n$.

Une k-liste d'éléments **distincts** de E est appelé **k-arrangement** de E.

Propriété 6 ($k \le n$) :

Le nombre de k-arrangements d'un ensemble E à n éléments est :

$$A_n^k = n \times (n-1) \times \ldots \times (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!} \quad \text{où } 1 \le k \le n.$$

► ***Exercice C1*** + ► ***Exercice C2***

Cas particulier où k = n :

Définition :

Soit E un ensemble fini à n éléments (n ≥ 1).
Un n-uplet d'éléments **distincts** deux à deux de E est appelé **permutation**.

→ *On réalise une permutation si on prend tous les éléments de l'ensemble dans un ordre donné.* (cas ❹ - Activité 1)

Propriété 7 (k = n) :

Le nombre de permutations possibles d'un ensemble à n éléments est n !

(*n-uplets d'éléments* distincts)

→ En effet, pour k = n, on a : n (n - 1) … (n – n + 1) = n × (n – 1) × . . . × 1 = n !

Exemple :

Les anagrammes du mot GIRAFE correspondent à toutes les permutations de E = { G,I,R,A,F,E }.

→ Il y a 6 ! = 720 anagrammes du mot GIRAFE.

Ces mots n'ont pas de sens en réalité, sauf le mot … FIGERA du verbe figer.

Synthèse – Nombre de k-uplets d'un ensemble à n éléments.

k-listes	k < n	k = n	k > n
Eléments distincts ou non	n^k		
Eléments distincts	n × (n-1) × … × (n-k+1) *Arrangement*	n ! *Permutation*	

▶ ***Exercice C3***

4°) Dénombrer des parties ou sous-ensembles d'un ensemble fini E

a) Approche – Activité A2 Voir feuille annexe.

b) COMBINAISON - Définition et propriété

Définition :

Soit E un ensemble fini à n éléments (n ≥ 1) et k entier naturel tel que k ≤ n .
Une combinaison de k éléments parmi n est un sous-ensemble à k éléments pris parmi les n éléments.

Le nombre de combinaisons de k éléments pris parmi n est noté $\binom{n}{k}$ ou C_n^k .

On lit : « *k parmi n* »

Exemple :

Si E = $\{a,b,c,d\}$ alors $\{a,c\}$ est une combinaison de 2 éléments parmi 4.

Propriété 8 :

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

(cas ❶ , ❸ , ❺ - Activité 1)

☞ Vérifier sur les exemples ❶ , ❸ , ❺ - Activité 1.

Exemple : Le nombre de mains de 5 cartes extraites d'un jeu de 32 cartes est :

$$\rightarrow \binom{32}{5} = \frac{32\times 31\times 30\times 29\times 28}{5\times 4\times 3\times 2\times 1} = 201\ 376$$

► ***Exercice C4***

Propriété 9 : Soient n et k entiers naturels, k ≤ n

$$\binom{n}{0} = 1 \qquad \binom{n}{1} = n \qquad \binom{n}{n} = 1 \qquad \binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$$

Propriété 10 – Soit n un entier naturel.

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

c) Triangle de Pascal

Propriété 11 – Relation de Pascal : Soient n et k entiers naturels, 1 ≤ k ≤ n - 1.

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$$

n \ k	0	1	2	3	4	5	6
0	**1**						
1	**1**	**1**					
2	**1**	2	**1**				
3	**1**	3	3	**1**			
4	**1**	4	6	4	**1**		
5	**1**	5	10	10	5	**1**	
6	**1**	6	15	20	15	6	**1**

Triangle de Pascal

Blaise Pascal.

Savant mathématicien physicien et philosophe français (Clermont-Ferrand 1623 - Paris 1662)
Il conçut entre autres une machine arithmétique dite ***machine de Pascal*** *capable d'effectuer les quatre opérations qui lui valut immédiatement une grande célébrité.*

$\binom{n}{k}$ *sont appelés* ***coefficients binomiaux.***

Formule du binôme de Newton

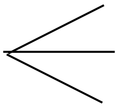
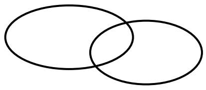
Pour tous réels a et b et pour tout entier naturel n :

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n}b^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

QUELQUES CONSEILS METHODOLOGIQUES

Chacun des types de dénombrement étudié, considéré isolément, ne présente pas de grandes difficultés. Mais face à un exercice à résoudre, lequel choisir ?
Les conseils qui suivent peuvent vous servir de guide mais ne prétendent pas apporter une réponse à tous les problèmes ...

1. Utiliser votre bon sens avant d'essayer de trouver une formule adaptée.

2. Utiliser un arbre  , un dessin  , des cases

3. La présence dans l'énoncé du mot "ou" indique qu'on peut sans doute étudier une réunion d'ensembles.
   Pour utiliser card $(A \cup B)$ = card A + card B, il faut s'assurer que les ensembles A et B sont disjoints.

4. La présence dans l'énoncé du mot "et" indique que l'on peut sans doute utiliser le principe multiplicatif.
   Il faut s'assurer au préalable que les choix conduisant aux ensembles A et B sont indépendants.

5. Si vous devez utiliser une formule, voici un tableau qui peut vous aider dans votre choix :

<u>Tirage d'un échantillon de k éléments dans une population de n individus :</u>

Mode de tirage	Descriptif	Terme caractéristique	Conditions	Nombre de tirages
Tirages successifs avec remise	*Tirages non exhaustifs :* Eléments distincts ou non et ordonnés	listes	n et k non nuls	Nombre de listes de k éléments choisis parmi n : n^p
Tirages successifs sans remise	*Tirages exhaustifs :* Eléments distincts et ordonnés	Arrangements	$0 \leq k \leq n$	Nombre d'arrangements de k éléments parmi n : A_n^k
	Cas particulier :	Permutations	$n = k$	Nombre de permutations de n éléments : $A_n^n = n!$
Tirages simultanés	Parties à p éléments d'un ensemble à n éléments : Eléments distincts et non ordonnés	Combinaisons	$0 \leq k \leq n$	Nombre de combinaisons de k éléments choisis parmi n : $\binom{n}{k}$

<u>exhaustif</u> : qui épuise un sujet et le traite en détail (En anglais : *To exhaust = épuiser*).
De manière exhaustive : énumérer tous les cas possibles.