Cours	RAISONNEMENT PAR RECURRENCE

Le raisonnement par récurrence est la version mathématique du raisonnement « *de proche en proche* ».

Exemple 1 :

Si ① : Le premier domino tombe
② : La chute de tout domino entraîne la chute du suivant,
Alors : Tous les dominos tombent.

Exemple 2 :

Si ① : On met le pied sur la 1e marche
② : On sait monter d'une marche à la suivante,
Alors : On sait monter tout l'escalier.

En mathématiques, un certain nombre de propriétés dépendent d'un entier naturel n.

Exemple : *La somme des entiers naturels de 1 à n, pour n ≥ 1, est égale à* $\frac{n(n+1)}{2}$.

On peut vérifier l'exactitude de ce résultat pour n = 1, n = 2, n = 3, etc …
Même si on la vérifie jusqu'à n = 100, cela ne démontre pas qu'elle est vraie pour tout n.

Pour effectuer cette démonstration, on dispose d'un outil particulier : l'**axiome de récurrence** :

Axiome de récurrence :

Si une propriété est vraie pour un entier naturel n_0 et si elle est héréditaire,
alors elle est vraie pour tous les entiers supérieurs ou égaux à n_0

Info : *Un **axiome** est une proposition placée au départ d'une théorie sans être déduite d'autres propositions. Il ne se démontre pas.*

Définition :

Une propriété est dite **héréditaire** si on peut prouver que,
lorsqu'elle est vraie pour un entier p, elle est vraie aussi pour l'entier p + 1.

Raisonnement par récurrence :

Il se fait en 3 étapes :

① **Montrer que la propriété est vraie pour un rang n_0 :**
↳ *Il s'agira souvent de l'entier $n_0 = 0$ ou de l'entier $n_0 = 1$.*

② **Montrer que la propriété est héréditaire :**
↳ *Prendre pour hypothèse qu'elle est vraie pour l'entier p, avec $p \geq n_0$ et démontrer qu'elle est vraie alors pour l'entier p + 1.*

③ **Conclure à l'aide de l'axiome de récurrence.**
↳ *Pour tout $n \geq n_0$, la propriété est vraie.*

Histoire

C'est à Giuseppe Peano (1858-1932) et à Henri Poincaré (1854-1912) que l'on doit l'axiome de récurrence.
Une des traces les plus anciennes de mise en œuvre d'un raisonnement par récurrence se trouve dans le Traité du triangle arithmétique de Blaise Pascal (1623-1662).