

I - GENERALITES

1°) DEFINITION ET VOCABULAIRE

Définition :

Une **suite** est une application de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$: $n \mapsto U(n)$. On notera $U_n = U(n)$.

Exemple : la suite des nombres pairs.

Vocabulaire : • La suite est notée $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ou $(U_n)_{n \geq 0}$ ou $(U_n)_n$ ou encore (U_n) .

- Une suite peut démarrer au rang n_0 , on note alors $(U_n)_{n \geq n_0}$.
- U_n est appelé **terme général** de la suite $(U_n)_n$.

2°) DIVERS MODES DE DEFINITION DE SUITES

a) **Relation du type** $U_n = f(n)$

Exemple 1 : Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $U_n = 1 + \frac{1}{n}$. Calculer U_3 .

b) **Relation de récurrence**

Exemple 2 : Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $U_0 = 2$ et pour tout entier n : $U_{n+1} = U_n^2 - 1$. Calculer U_3 .

Exemple 3 : Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $U_0 = 1$, $U_1 = -1$ et pour tout entier n : $U_{n+2} = 2U_{n+1} - U_n$.

Calculer les 4 premiers termes de cette suite.

II - ETUDES DE SUITES PARTICULIERES

1°) SUITES ARITHMETIQUES

Définition :

Une suite **arithmétique** est définie par la relation de récurrence $U_{n+1} = U_n + r$, où r est la **raison**.

Exemple : la suite des nombres entiers ($r = 1$), la suite des nombres impairs ($r = 2$) ...

Propriété caractéristique :

Pour tout $n \geq 0$, $U_n = U_0 + nr$

ou si la suite est définie à partir d'un rang n_0 :

Pour tout $n \geq n_0$, $U_n = U_{n_0} + (n - n_0)r$

Somme des n premiers entiers naturels non nuls :

$$s_n = 1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Somme des $n+1$ premiers termes d'une suite arithmétique :

$$S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_n = (n+1) \frac{U_0 + U_n}{2}$$

2°) SUITES GEOMETRIQUES

Définition :

Une suite **géométrique** est définie par la relation de récurrence $U_{n+1} = qU_n$, où $q \neq 0$ est la **raison**.

Exemple : la suite des puissances de 2 ($q = 2$) ...

Propriété caractéristique :

Pour tout $n \geq 0$, $U_n = q^n U_0$

ou si la suite est définie à partir d'un rang n_0 :

Pour tout $n \geq n_0$, $U_n = q^{n-n_0} U_{n_0}$

Somme des puissances d'un nombre :

Pour $q \neq 1$, on a :

$$\sigma_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Somme des $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique :

Pour $q \neq 1$, on a :

$$S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_n = U_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

3°) SUITES ARITHMETICO-GEOMETRIQUES

Définition :

Ce sont des suites définies par la relation de récurrence $U_{n+1} = aU_n + b$, où $a \neq 0$.

Etude de ces suites : idée : se ramener à une suite géométrique.

(On choisit α pour que la suite (V_n) définie par $V_n = U_n - \alpha$ soit une suite géométrique)

Exemple 4 : Soit la suite (U_n) définie par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{1}{3}U_n + 1 \end{cases}$.

- 1) On pose $V_n = U_n - \frac{3}{2}$. Montrer que (V_n) est une suite géométrique et calculer V_0 .
- 2) Exprimer V_n et U_n en fonction de n .

III - SENS DE VARIATION D'UNE SUITE

1°) DEFINITIONS

La suite (U_n) est **croissante** (resp. **décroissante**) à partir du rang n_0 si , pour tout entier $n \geq n_0$ on a $U_n \leq U_{n+1}$ (resp. $U_n \geq U_{n+1}$) .

La suite (U_n) est **constante** à partir du rang n_0 si , pour tout entier $n \geq n_0$, on a $U_{n+1} = U_n$.

Une suite est **monotone** si elle est croissante ou si elle est décroissante.

2°) TECHNIQUES

a) **Signe de** $U_{n+1} - U_n$.

Exemple 5 : Etudier les variations de (U_n) définie par $U_n = 2n + \sin n$.

Exemple 6 : Etudier les variations de (U_n) définie par $U_{n+1} = (U_n)^2 - U_n + 1$, et U_0 donné.

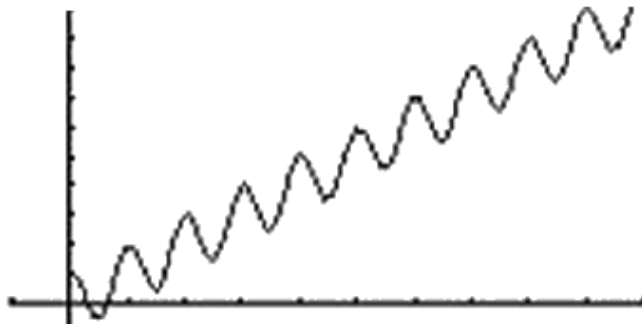
b) **Comparaison de** $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ **avec 1** , dans le cas où $U_n > 0$.

Exemple 7 : Etudier les variations de (U_n) définie par $U_n = \frac{n!}{2^n}$.

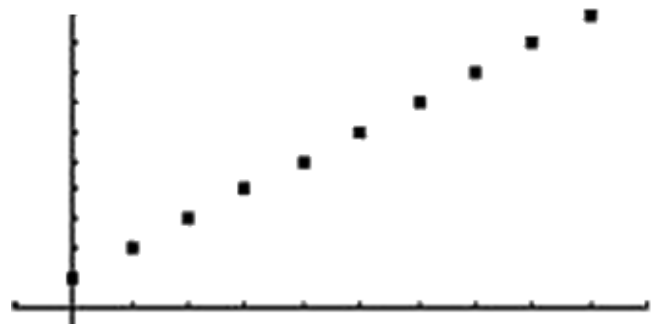
c) **Technique fonctionnelle** (cas où $U_n = f(n)$) .

TH : Soient $n_0 \in \mathbb{N}$ et $U_n = f(n)$; Si f est croissante (ou décroissante) sur $[n_0, +\infty[$ alors la suite (U_n) est croissante (ou décroissante) à partir du rang n_0 .

Remarque : La condition est suffisante, mais pas nécessaire, c'est-à-dire que la suite peut être croissante alors que la fonction ne l'est pas.



$f(x) = \cos(2\pi x) + x$
La fonction n'est pas croissante



$U_n = \cos(2\pi n) + n$
La suite est croissante

Exemple 8 : Etudier les variations de $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $U_n = \frac{n^2 + 3}{2n - 1}$.

d) **Raisonnement par récurrence.**

Exemple 9 : Etudier les variations de (U_n) définie par $U_0 = 5$ et $U_{n+1} = \sqrt{U_n + 2}$.

IV - SUITES MAJOREES, SUITES MINOREES

1°) DEFINITIONS

La suite (U_n) est **majorée** s'il existe un réel M tel que, pour tout entier n , on a $U_n \leq M$.

Ce nombre M est appelé **majorant** de la suite (U_n) .

La suite (U_n) est **minorée** s'il existe un réel m tel que, pour tout entier n , on a $U_n \geq m$.

Ce nombre m est appelé **minorant** de la suite (U_n) .

Une suite est **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée.

Remarques : • Il n'y a pas unicité du majorant, lorsqu'il existe ! (idem pour le minorant)
• Une suite croissante est minorée par son premier terme
et une suite décroissante est majorée par son premier terme.

2°) TECHNIQUES

a) **Signe de $U_n - m$ ou de $U_n - M$.**

Exemple 10 : Montrer que la suite (U_n) définie par $U_n = \frac{3n^2 + 2n + 2}{n^2 + 1}$ est minorée par 3

b) **Technique fonctionnelle** (cas où $U_n = f(n)$) .

On étudie les extrema de f .

Exemple 11 : Etudier le cas de la suite (U_n) définie par $U_n = \frac{n-1}{n^2+1}$.

c) **Raisonnement par récurrence** .

Exemple 12 (9 bis) : Etudier le cas de la suite (U_n) définie par $U_0 = 5$ et $U_{n+1} = \sqrt{U_n + 2}$.

d) **A l'aide d'encadrements** .

Exemple 13 : Etudier le cas de la suite (U_n) définie par $U_n = \frac{3n + \sin n}{n^2}$.

Exemple 14 : Etudier le cas de la suite (U_n) définie par $U_n = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{4^n}$.

3°) CAS DES SUITES NON MAJOREES OU NON MINOREES

Par négation , la suite (U_n) est **non majorée** si quel que soit le réel A , aussi grand soit-il, on peut trouver un terme U_N tel que , $U_N > A$.

V - LIMITE D'UNE SUITE - CONVERGENCE , DIVERGENCE

1°) CONVERGENCE, DIVERGENCE D'UNE SUITE

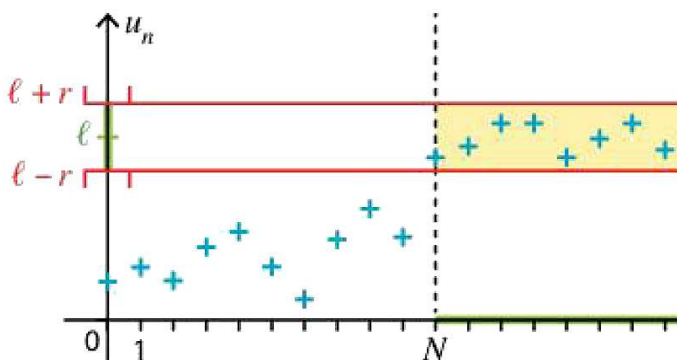
Définition :

La suite (U_n) admet une **limite** si et seulement si U_n admet une limite lorsque n tend vers $+\infty$.

Définitions :

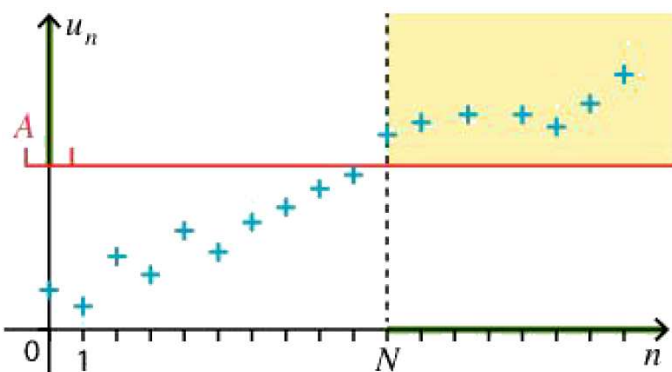
Limite finie

La suite (U_n) a pour limite ℓ si et seulement si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.



Limite infinie

La suite (U_n) a pour limite $+\infty$ si et seulement si tout intervalle ouvert de la forme $]A, +\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.



Définitions :

On dit qu'une suite **converge** si elle admet une limite **finie**.

On dit qu'une suite **diverge** si elle ne converge pas.

Exemple 15 : Démontrer la convergence de la suite (U_n) définie par $U_n = \frac{1}{n}$.

Exemples : ♦ Les suites de terme général $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n^2}$ et $\frac{1}{\sqrt{n}}$ sont convergentes ; Leur limite est 0.

♦ Les suites de terme général n , n^2 et $\sqrt{n}$ sont divergentes ; Leur limite est $+\infty$.

♦ La suite de terme général $(-1)^n$ est divergente ; Elle n'a pas de limite.

2°) ALGORITHME DE DETERMINATION D'UN SEUIL A PARTIR DUQUEL $U_n \geq A$
(Cas d'une suite croissante de limite infinie)

Exemple : Soit la suite (U_n) définie par $U_n = 4n^2 + 1$.

On peut démontrer que cette suite est croissante,
et qu'elle tend vers $+\infty$.

```
Saisir A
u prend la valeur 1
n prend la valeur 0
Tant que u < A
    n prend la valeur n+1
    u prend la valeur 4 × n² + 1
Fin Tant que
Afficher n
```

3°) TECHNIQUES

a) Opérations sur les limites

Les énoncés sur la limite d'une somme, d'un produit, d'un quotient . . . de suites sont les mêmes que pour les fonctions (Sous réserve des F I).

Exemple 16 : On pose $U_n = n^2 + 5n + 1$ et $V_n = \frac{n^2 + 1}{2n^2 - 1}$.

Etudier la convergence des suites (U_n) et (V_n) .

b) Comparaison

Théorème 1 : **Démonstration**

Si (U_n) et (V_n) sont deux suites telles que $U_n \geq V_n$ à partir d'un certain rang et (V_n) tend vers $+\infty$
Alors (U_n) tend vers $+\infty$.

Théorème 2 :

Si (U_n) et (V_n) sont deux suites telles que $U_n \leq V_n$ à partir d'un certain rang et (V_n) tend vers $-\infty$
Alors (U_n) tend vers $-\infty$.

Théorème des gendarmes (admis) :

Soit (U_n) , (V_n) et (W_n) trois suites.

Si, à partir d'un certain rang, $V_n \leq U_n \leq W_n$, et si (V_n) et (W_n) convergent vers un réel L,

Alors (U_n) converge vers L.

Exemple 17 : Etudier la convergence de la suite (U_n) définie par $U_n = \frac{(-1)^n + \sin n}{n^3}$.

Exemple 18 : Etudier la convergence de la suite (U_n) définie par $U_n = \frac{n!}{n^2}$.

(On remarquera que $n! \geq n(n-1)(n-2)$).

Théorème 3 :

Si (U_n) et (V_n) sont des suites convergentes telles que $U_n \leq V_n$ à partir d'un certain rang,

Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$

Théorème 4 :

Si (U_n) est une suite croissante et admet pour limite L , alors pour tout entier naturel n , $U_n \leq L$.

c) **Technique fonctionnelle** (cas où $U_n = f(n)$).

TH : Si $U_n = f(n)$ alors la suite (U_n) a la même limite que f en $+\infty$.

Exemple 19 : Etudier la convergence de la suite (U_n) définie par $U_n = n^2 + 2n$.

4°) LIMITE D'UNE SUITE GEOMETRIQUE :

TH :

$$\text{Soit } q \neq 0 ; \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } q > 1 \\ 1 & \text{si } q = 1 \\ 0 & \text{si } -1 < q < 1 \\ \text{pas de limite} & \text{si } q \leq -1 \end{cases}$$

Démonstration :

1°) **Prérequis :** Inégalité de Bernoulli

Démontrer que, pour tout entier naturel n , $(1+a)^n \geq 1+na$, où a est un réel positif.

2°) Démontrer le théorème dans le cas où $q > 1$.

3°) Démontrer le théorème dans le cas où $-1 < q < 1$.

Exemple 20 : Etudier la convergence de la suite (U_n) définie par : $U_n = 2 - \frac{1}{3^n}$.

5°) THEOREMES

TH1 : Toute suite croissante et majorée converge

Démonstration

TH2 : Toute suite décroissante et minorée converge

Exemple 21 : Soit la suite (U_n) définie par $U_0 = \frac{3}{2}$ et pour tout entier n : $U_{n+1} = (U_n - 1)^2 + 1$.

a) Démontrer par récurrence que pour tout n : $1 \leq U_n \leq 2$.

b) Démontrer que pour tout n : $U_{n+1} - U_n = (U_n - 2)(U_n - 1)$.

c) Etudier le sens de variation de la suite (U_n) .

d) Que peut-on en déduire quant à la convergence de (U_n) ?

e) Peut-on déterminer la limite de cette suite ?

TH3 : Toute suite croissante NON majorée a pour limite $+\infty$

TH4 : Toute suite décroissante NON minorée a pour limite $-\infty$