Exo	LOIS DISCRETES

Probabilités conditionnelles et loi binomiale

Exercice 2 En rouge et noir

Une urne A contient 2 boules rouges et 3 boules noires, une urne B contient 3 boules rouges et 2 boules noires. On tire au hasard une boule de l'urne A :
Si elle est noire, on la place dans l'urne B, sinon, on l'écarte du jeu.
On tire au hasard ensuite une boule de l'urne B. On considère les événements suivants :

R_1 **: « la boule tirée de A est rouge »** N_1 **: « la boule tirée de A est noire »**
R_2 **: « la boule tirée de B est rouge »** N_2 **: « la boule tirée de B est noire »**

1°) a) Déterminer les probabilités des événements R_1 et N_1 .
b) Calculer les probabilités des événements « R_2 sachant R_1 » et « R_2 sachant N_1 ».
En déduire que la probabilité de R_2 est de $\frac{27}{50}$.
c) Calculer la probabilité de N_2 .

2°) On répète n fois l'épreuve précédente (*tirage d'une boule de A , suivi du tirage d'une boule de B dans les mêmes conditions initiales indiquées ci-dessus*) ,
en supposant les différentes épreuves indépendantes .
Quel nombre minimum d'essais doit-on effectuer pour que la probabilité d'obtenir au moins une fois une boule rouge de l'urne B soit supérieure à 0,99 ?

CORRECTION

Une urne A contient 2 boules rouges et 3 boules noires, une urne B contient 3 boules rouges et 2 boules noires. On tire au hasard une boule de l'urne A :
Si elle est noire, on la place dans l'urne B, sinon, on l'écarte du jeu.
On tire au hasard ensuite une boule de l'urne B. On considère les événements suivants :

R_1 **: « la boule tirée de A est rouge »** N_1 **: « la boule tirée de A est noire »**
R_2 **: « la boule tirée de B est rouge »** N_2 **: « la boule tirée de B est noire »**

1°) a) Déterminer les probabilités des événements R_1 et N_1 .

L'expérience est équiprobable donc la probabilité d'un événement A est :

$$p(A) = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}.$$

On a alors $p(\mathbf{R_1}) = \frac{2}{5}$ et $p(\mathbf{N_1}) = \frac{3}{5}$.

b) Calculer les probabilités des événements « R_2 sachant R_1 » et « R_2 sachant N_1 ».
En déduire que la probabilité de R_2 est de $\frac{27}{50}$.

Si la boule tirée de l'urne A est rouge, la composition de l'urne B est :

3 boules rouges et 2 boules noires donc : $\boldsymbol{p_{R_1}(R_2) = \frac{3}{5}}$.

Si la boule tirée dans l'urne A est noire, la composition de l'urne B est :

3 boules rouges et 3 boules noires donc $p_{N_1}(R_2) = \frac{3}{6}$

c'est-à-dire $\boldsymbol{p_{N_1}(R_2) = \frac{1}{2}}$.

D'après la formule des probabilités totales :

$p(R_2) = p(R_2 \cap R_1) + p(R_2 \cap N_1)$ avec :

$p(R_2 \cap R_1) = p_{R_1}(R_2) \times p(R_1)$ et $p(R_2 \cap N_1) = p_{N_1}(R_2) \times p(N_1)$.

D'où $p(R_2) = p_{R_1}(R_2) \times p(R_1) + p_{N_1}(R_2) \times p(N_1)$,

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} p(R_2) &= \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} \\ &= \frac{6}{25} + \frac{3}{10} \\ &= \frac{12}{50} + \frac{15}{50} = \frac{27}{50}. \end{aligned}$$

c) Calculer la probabilité de N_2 .

$p(N_2) = 1 - p(R_2)$ donc $\boldsymbol{p(N_2) = \frac{23}{50}}$.

2°) On répète n fois l'épreuve précédente (***tirage d'une boule de A , suivi du tirage d'une boule de B dans les mêmes conditions initiales indiquées ci-dessus*** **) ,**
en supposant les différentes épreuves indépendantes .
Quel nombre minimum d'essais doit-on effectuer pour que la probabilité d'obtenir au moins une fois une boule rouge de l'urne B soit supérieure à 0,99 ?

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges obtenu après n essais.

X suit la loi binomiale de paramètres n et p = $\frac{27}{50}$. (*On a un schéma de Bernoulli*)

On cherche n tel que P (X ≥ 1) ≥ 0,99.

P (X ≥ 2) ≥ 0,99 ⇔ 1 - P (X = 0) ≥ 0,99 ⇔ P (X = 0) ≤ 0,01 ⇔ $\left(\frac{27}{50}\right)^n \leq 0{,}01$

$$\Leftrightarrow n \ln\left(\frac{27}{50}\right) \leq \ln(0{,}01) \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(0{,}01)}{\ln\left(\frac{27}{50}\right)}$$

Le premier entier qui convient est n = 6.