► Exercice 2

Etudier la monotonie des suites suivantes :

1°) (U_n) suite définie par $U_0 = 0$ et pour tout entier naturel n : $U_{n+1} = \sqrt{2U_n + 1}$.

2°) (V_n) suite définie pour tout entier naturel $n \geq 3$ par : $V_n = \dfrac{-n+1}{n-2}$.

3°) (W_n) suite définie par $W_0 = 16$ et pour tout entier naturel n : $W_{n+1} = \dfrac{1}{2}W_n + 5$.

4°) (P_n) suite définie pour tout entier naturel n par : $P_n = \dfrac{n}{2^n}$.

5°) (Q_n) suite définie pour tout entier naturel n par : $Q_n = \dfrac{3n+4}{7n+9}$.

CORRECTION

► Exercice 2 Etudier la monotonie des suites suivantes :

1°) (U_n) suite définie par $U_0 = 0$ et pour tout entier naturel n : $U_{n+1} = \sqrt{2U_n + 1}$.

$U_0 = 0$; $U_1 = \sqrt{2U_0 + 1} = \sqrt{1} = 1$; $U_2 = \sqrt{2U_1 + 1} = \sqrt{3} \simeq 1,7$.

On conjecture que la suite est croissante.

Raisonnons par récurrence.

Considérons la propriété : $\mathscr{P}_n$: « $U_{n+1} \geq U_n$ ».

- $\mathscr{P}_0$ est vraie car $U_1 \geq U_0$.
- Supposons que $\mathscr{P}_k$ soit vraie pour un entier naturel k.

Alors $U_{k+1} \geq U_k$.

$2U_{k+1} \geq 2U_k$

$2U_{k+1} + 1 \geq 2U_k + 1$

$\sqrt{2U_{k+1} + 1} \geq \sqrt{2U_k + 1}$

$U_{k+2} \geq U_{k+1}$

$\mathscr{P}_{k+1}$ est donc vraie. La propriété est héréditaire.

- CONCLUSION : Pour tout entier naturel n, $\mathscr{P}_n$ est vraie.

La suite est donc croissante.

2°) (V_n) suite définie pour tout entier naturel $n \geq 3$ par : $V_n = \dfrac{-n+1}{n-2}$.

1e méthode : Différence des termes consécutifs

$$V_{n+1} - V_n = \frac{-(n+1)+1}{(n+1)-2} - \frac{-n+1}{n-2} = \frac{-n}{n-1} - \frac{-n+1}{n-2} = \frac{-n(n-2)-(-n+1)(n-1)}{(n-1)(n-2)}$$

$$V_{n+1} - V_n = \frac{-n^2+2n-(-n^2+n+n-1)}{(n-1)(n-2)} = \frac{-n^2+2n+n^2-2n+1}{(n-1)(n-2)} = \frac{1}{(n-1)(n-2)}$$

On a donc $V_{n+1} - V_n > 0$ car $n \geq 3$ La suite est donc croissante.

2e méthode : Technique fonctionnelle

$$V_n = \frac{-n+1}{n-2} = f(n) \quad \text{avec} \quad f(x) = \frac{-x+1}{x-2} \quad \text{sur } [\,3\,;+\infty\,[.$$

$$f'(x) = \frac{-1(x-2)-(-x+1)}{x-2} = \frac{-x+2+x-1}{x-2} = \frac{1}{x-2} > 0 \quad \text{donc } f \text{ croissante.}$$

D'après le théorème :

> Soient $n_0 \in \mathbb{N}$ et $U_n = f(n)$; Si f est croissante (*ou* décroissante) sur $[\,n_0\,,+\infty\,[$
>
> alors la suite (U_n) est croissante (*ou* décroissante) à partir du rang n_0.

(V_n) est croissante.

3°) (W_n) suite définie par $W_0 = 16$ et pour tout entier naturel n : $W_{n+1} = \dfrac{1}{2}W_n + 5$.

1e méthode : Différence des termes consécutifs

$$W_{n+1} - W_n = \frac{1}{2}W_n + 5 - W_n = -\frac{1}{2}W_n + 5 = \frac{10 - W_n}{2}$$

Nous ne pouvons aboutir, sauf si l'on démontre par récurrence que $W_n > 10$ pour tout n.

La suite serait alors décroissante…

2e méthode : Récurrence

Considérons la propriété : $\mathcal{P}_n$: « $W_{n+1} \leq W_n$ ».

- $\mathcal{P}_0$ est vraie car $W_1 = 13 \leq W_0$.
- Supposons que $\mathcal{P}_k$ soit vraie pour un entier naturel k.

  Alors $W_{k+1} \leq W_k$.

  $$\frac{1}{2}W_{k+1} \leq \frac{1}{2}W_k$$

  $$\frac{1}{2}W_{k+1} + 5 \leq \frac{1}{2}W_k + 5$$

  $$W_{k+2} \leq W_{k+1}$$

  $\mathcal{P}_{k+1}$ est donc vraie. La propriété est héréditaire.
- CONCLUSION : Pour tout entier naturel n, $\mathcal{P}_n$ est vraie.

La suite est donc décroissante.

4°) (P_n) suite définie pour tout entier naturel n par : $P_n = \dfrac{n}{2^n}$.

1e méthode : **Différence des termes consécutifs**

$$P_{n+1} - P_n = \frac{n+1}{2^{n+1}} - \frac{n}{2^n} = \frac{n+1-2n}{2^{n+1}} = \frac{1-n}{2^{n+1}} \leq 0 \text{ pour } n \geq 1.$$

La suite est donc décroissante à partir du rang 1.

2e méthode : **Quotient des termes consécutifs** (*possible car* $P_n = \dfrac{n}{2^n} > 0$)

$$\frac{P_{n+1}}{P_n} = \frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}} = \frac{n+1}{2^{n+1}} \times \frac{2^n}{n} = \frac{1}{2} \times \frac{n+1}{n} = \frac{n+1}{n+n} \leq 1 \text{ pour } n \geq 1 \text{ car } n+n \geq n+1.$$

La suite est donc décroissante à partir du rang 1.

5°) (Q_n) suite définie pour tout entier naturel n par : $Q_n = \dfrac{3n+4}{7n+9}$.

1e méthode : **Différence des termes consécutifs**

$$Q_{n+1} - Q_n = \frac{3(n+1)+4}{7(n+1)+9} - \frac{3n+4}{7n+9} = \frac{3n+7}{7n+16} - \frac{3n+4}{7n+9} = \frac{(3n+7)(7n+9)-(7n+16)(3n+4)}{(7n+16)(7n+9)}$$

$$Q_{n+1} - Q_n = \frac{21n^2+27n+49n+63-(21n^2+28n+48n+64)}{(7n+16)(7n+9)} = \frac{-1}{(7n+16)(7n+9)} < 0$$

La suite est donc décroissante.

2e méthode : **Technique fonctionnelle**

$$Q_n = \frac{3n+4}{7n+9} = f(n) \text{ avec } f(x) = \frac{3x+4}{7x+9} \text{ sur } [\,0\,;+\infty\,[.$$

$$f'(x) = \frac{3(7x+9)-7(3x+4)}{(7x+9)^2} = \frac{27-28}{(7x+9)^2} = \frac{-1}{(7x+9)^2} < 0 \text{ donc } f \text{ décroissante.}$$

D'après le théorème :

Soient $n_0 \in \mathbb{N}$ et $U_n = f(n)$; Si f est croissante (*ou* décroissante) sur $[\,n_0\,,+\infty\,[$

alors la suite (U_n) est croissante (*ou* décroissante) à partir du rang n_0.

(Q_n) est décroissante.