SUITES

Convergence

► *Exercice 3*

Soit la suite (U_n) définie par $U_0 = 2$ et pour tout entier naturel n : $U_{n+1} = \dfrac{1+U_n^{\ 2}}{2U_n}$.

1°) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $U_n > 0$.

2°) Montrer que la suite est minorée par 1.

3°) Etudier la monotonie de (U_n).

4°) Montrer que (U_n) est convergente.

5°) Déterminer la limite de la suite.

CORRECTION

► ***Exercice 3*** Soit la suite (U_n) définie par $U_0 = 2$ et pour tout entier naturel n : $U_{n+1} = \dfrac{1+U_n^{\,2}}{2U_n}$.

1°) **Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel *n*, $U_n > 0$.**

Considérons la propriété : $\mathscr{P}_n$: « $U_n > 0$ ».

- $\mathscr{P}_0$ est vraie car $U_0 = 2 > 0$.
- Supposons que $\mathscr{P}_k$ soit vraie pour un entier naturel *k*.

  Alors $U_k > 0$.

  $U_{k+1} > 0$ car $U_{k+1} = \dfrac{1+U_k^{\,2}}{2U_k}$

  $\mathscr{P}_{k+1}$ est donc vraie. La propriété est héréditaire.
- CONCLUSION : Pour tout entier naturel *n*, $\mathscr{P}_n$ est vraie.

La suite est donc minorée par 0.

2°) **Montrer que la suite est minorée par 1.**

$$U_{n+1} - 1 = \frac{1+U_n^{\,2}}{2U_n} - 1 = \frac{1+U_n^{\,2} - 2U_n}{2U_n} = \frac{(U_n - 1)^2}{2U_n} \geq 0.$$

Donc $U_{n+1} \geq 1$ pour tout n ≥ 0,

donc $U_n \geq 1$ pour tout n ≥ 1, et comme $U_0 = 2 > 1$ on a $U_n \geq 1$ pour tout n ≥ 0.

La suite est donc minorée par 1.

On pouvait faire une récurrence.

3°) **Etudier la monotonie de (U_n).**

$$U_{n+1} - U_n = \frac{1+U_n^{\,2}}{2U_n} - U_n = \frac{1+U_n^{\,2} - 2U_n^{\,2}}{2U_n} = \frac{1-U_n^{\,2}}{2U_n} = \frac{(1-U_n)\,(1+U_n)}{2U_n}$$

Comme $U_n \geq 1$, on a $1+U_n > 0$, $2U_n > 0$ et $1-U_n \leq 0$ donc $U_{n+1} - U_n \leq 0$

La suite (U_n) est donc décroissante.

4°) **Montrer que (U_n) est convergente.**

(U_n) est décroissante et minorée, donc convergente.

Théorème : Toute suite décroissante et minorée converge.

5°) **Déterminer la limite de la suite.**

Notons *L* la limite de la suite.

U_n tend vers *L*, U_{n+1} tend vers *L*, et comme $U_{n+1} = \dfrac{1+U_n^{\,2}}{2U_n}$ on a, par passage à la limite $L = \dfrac{1+L^2}{2L}$

soit $2L^2 = 1 + L^2$, ou encore $L^2 = 1$, et donc $L = 1$ solution positive car $U_n > 0$.

La suite tend vers L.