SUITES

Suite arithmético-géométrique

► *Exercice 4*

Soit la suite (U_n) définie par $U_0 = 6$ et pour tout entier naturel n : $U_{n+1} = 3U_n - 8$.

1°) Calculer U_1, U_2, U_3.

2°) La suite (U_n) est-elle arithmétique ? Géométrique ?

3°) On pose, pour tout entier naturel n, $V_n = U_n - 4$.

a) Calculer V_0 , V_1, V_2 et V_3.

b) Montrer que (V_n) est une suite géométrique.

c) Exprimer V_n en fonction de n.

4°) Exprimer U_n en fonction de n.

► *Exercice 4b*

Déterminer la limite de la suite (U_n) définie à l'exercice 4 ci-dessus.

CORRECTION

► ***Exercice 4*** Voir corrigé en vidéo : https://www.youtube.com/watch?v=N-t5FExdSk8

Soit la suite (U_n) définie par $U_0 = 6$ et pour tout entier naturel *n* : $U_{n+1} = 3U_n - 8$.

1°) Calculer U_1, U_2, U_3.

$u_1 = 3u_0 - 8 = 10$
$u_2 = 3u_1 - 8 = 22$
$u_3 = 3u_2 - 8 = 58$

2°) La suite (U_n) est-elle arithmétique ? Géométrique ?

2) $u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$. Donc (u_n) n'est pas arithmétique

$\frac{u_1}{u_0} \neq \frac{u_2}{u_1}$. Donc (u_n) n'est pas géométrique.

3°) On pose, pour tout entier naturel *n*, $V_n = U_n - 4$.

a) Calculer V_0 , V_1, V_2 et V_3.

$v_0 = u_0 - 4 = 2$ $\quad$ $v_2 = u_2 - 4 = 18$
$v_1 = u_1 - 4 = 6$ $\quad$ $v_3 = u_3 - 4 = 54$

b) Montrer que (V_n) est une suite géométrique.

3.b) Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 4 \\ &= 3u_n - 8 - 4 \\ &= 3u_n - 12 \\ &= 3(u_n - 4) \\ &= 3v_n \end{aligned}$$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 3$

c) Exprimer V_n en fonction de *n*.

$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = 2 \times 3^n$

4°) Exprimer U_n en fonction de *n*.

$\forall n \in \mathbb{N}$, on a : $v_n = u_n - 4$

Donc $2 \times 3^n = u_n - 4$

D'où $2 \times 3^n + 4 = u_n$

► ***Exercice 4b*** **Déterminer la limite de la suite (U_n) définie à l'exercice 4 ci-dessus.**

$U_n = 2\times 3^n + 4$. Or $\lim\limits_{n\to+\infty} 3^n = +\infty$ d'après le théorème ci-dessous, donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty}$

Théorème : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty \quad si \ \ q > 1}$