

Exercice 14

On se propose de donner un encadrement de l'intégrale :

$$I = \int_0^1 e^{\sin x} dx.$$

1. a) Étudier les variations de la fonction f définie sur $[0; 1]$ par :

$$f(x) = \sin x - x.$$

b) En déduire que, pour tout nombre réel x de $[0; 1]$,
$$e^{\sin x} \leq e^x.$$

2. a) Étudier les variations de la fonction g définie sur $[0; 1]$ par $g(x) = e^x - x - 1$.

b) En déduire que, pour tout nombre réel x de $[0; 1]$,
$$e^{\sin x} \geq 1 + \sin x.$$

3. En déduire un encadrement de I .

CORRECTION

1. a) $f'(x) = \cos x - 1$

Pour tout $x \in [0; 1]$, $\cos x \leq 1$ donc $f'(x) \leq 0$.

f est donc décroissante sur $[0; 1]$.

b) $f(0) = 0$ et f décroissante sur $[0; 1]$ donc pour tout $x \in [0; 1]$, $f(x) \leq f(0)$ c'est-à-dire $\sin x - x \leq 0$, donc $\sin x \leq x$.

La fonction exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc $e^{\sin x} \leq e^x$ pour tout $x \in [0; 1]$.

2. a) $g'(x) = e^x - 1$.

$e^x - 1 \geq 0$ équivaut à $x \geq 0$.

x	0	1
$e^x - 1$	0	+
g	0  e	

b) Pour tout $x \in [0; 1]$, $g(x) \geq 0$ donc $e^x \geq x + 1$.

Pour tout $x \in [0; 1]$, $\sin x \in [0; 1]$ donc pour tout $x \in [0; 1]$, $e^{\sin x} \geq \sin x + 1$.

3. Pour tout $x \in [0; 1]$, $1 + \sin x \leq e^{\sin x} \leq e^x$ donc :

$$\int_0^1 (1 + \sin x) dx \leq I \leq \int_0^1 e^x dx$$

$$[x - \cos x]_0^1 \leq I \leq [e^x]_0^1$$

$$2 - \cos 1 \leq I \leq e - 1$$