Exo	CALCUL INTEGRAL

Exercice 18 On considère la fonction f définie sur $\left]-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right[$ par : $f(x)=\frac{8x^2-4}{4x^2-1}$

1°) Déterminer les réels a, b et c tels que, pour tout réel x de $\left]-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right[$, $f(x)=a+\frac{b}{2x+1}+\frac{c}{2x-1}$

2°) Calculer l'intégrale $\int_0^{\frac{1}{4}} f(x)\,dx$.

CORRECTION

1°) $$f(x)=a+\frac{b}{2x+1}+\frac{c}{2x-1}\Rightarrow\frac{8x^2-4}{4x^2-1}=\frac{a(2x+1)(2x-1)+b(2x-1)+c(2x+1)}{(2x+1)(2x-1)}$$

$$\Rightarrow\frac{8x^2-4}{4x^2-1}=\frac{a(4x^2-1)+2bx-b+2cx+c}{4x^2-1}$$

$$\Rightarrow 8x^2-4=a(4x^2-1)+2bx-b+2cx+c$$

$$\Rightarrow 8x^2-4=4a\,x^2-a+2bx+2cx+c-b$$

$$\Rightarrow 8x^2-4=4a\,x^2+(2b+2c)\,x+c-b-a$$

$$\Rightarrow\begin{cases}4a=8\\2b+2c=0\\c-b-a=-4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=2\\c=-b\\-b-b-a=-4\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a=2\\c=-b\\2b=4-a\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=2\\c=-b\\2b=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=2\\c=-1\\b=1\end{cases}$$

$$\boxed{\begin{cases}a=2\\b=1\\c=-1\end{cases}}\quad\text{et}\quad\boxed{f(x)=2+\frac{1}{2x+1}-\frac{1}{2x-1}}$$

2°) $$\int_0^{\frac{1}{4}}f(x)\,dx=\int_0^{\frac{1}{4}}2+\frac{1}{2x+1}-\frac{1}{2x-1}\,dx=\int_0^{\frac{1}{4}}2+\frac{1}{2}\times\frac{2}{2x+1}-\frac{1}{2}\times\frac{2}{2x-1}\,dx$$

$$=\left[2x+\frac{1}{2}\ln|2x+1|-\frac{1}{2}\ln|2x-1|\right]_0^{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}-\left(0+\frac{1}{2}\ln1-\frac{1}{2}\ln1\right)$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(\ln3-\ln2))+\frac{1}{2}\ln2-0=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln3-\frac{1}{2}\ln2+\frac{1}{2}\ln2=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln3$$

$$\boxed{\int_0^{\frac{1}{4}}f(x)\,dx=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln3}$$