Exercice 19

Soient a et b deux réels. On considère les fonctions f et F définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x-1)e^{-x} \quad \text{et} \quad F(x) = (ax+b)e^{-x}$$

1°) Déterminer les réels a et b tels que F soit une primitive de f .

2°) En déduire $\int_0^{\ln 3} (x-1)e^{-x} dx$.

CORRECTION

$$f(x) = (x-1)e^{-x} \quad \text{et} \quad F(x) = (ax+b)e^{-x}$$

1°) Dérivons F .

F est de la forme $u v$.

$$F'(x) = (a)e^{-x} + (ax+b)(-e^{-x}) = (a-ax-b)e^{-x} = (-ax+a-b)e^{-x}$$

Pour que F soit une primitive de f , il faut que $F' = f$.

$$F'(x) = f(x) \Leftrightarrow (-ax+a-b)e^{-x} = (x-1)e^{-x} \Leftrightarrow -ax+a-b = x-1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -a = 1 \\ a-b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \end{cases}$$

$$F(x) = -xe^{-x}$$

$$2^\circ) \int_0^{\ln 3} (x-1)e^{-x} dx = \left[-xe^{-x} \right]_0^{\ln 3} = -\ln 3 e^{-\ln 3} - 0 = -\ln 3 e^{-\frac{\ln 3}{3}} = -\ln 3 \times \left(\frac{1}{3} \right) = -\frac{1}{3} \ln 3.$$

$$\int_0^{\ln 3} (x-1)e^{-x} dx = -\frac{1}{3} \ln 3$$