Exo	CALCUL INTEGRAL

Exercice 20 Pour tout entier naturel n non nul, on pose : $I_n = \int_1^n e^{-t}\,dt$

Montrer que la suite (I_n) est croissante.

CORRECTION

1ere Méthode - On calcule l'intégrale ***(mais il faut savoir qu'on peut rarement le faire, car impossible d'expliciter une primitive de la fonction !)***

$$I_n = \int_1^n e^{-t}\,dt = \left[-e^{-t} \right]_1^n = -e^{-n} + e^{-1} = \frac{1}{e} - \frac{1}{e^n}$$

$$n \le n+1$$

$$e^n \le e^{(n+1)} \qquad \textit{car exp croissante}$$

$$\frac{1}{e^n} \ge \frac{1}{e^{(n+1)}} \qquad \textit{termes strictement positifs}$$

$$-\frac{1}{e^n} \le -\frac{1}{e^{(n+1)}}$$

$$\frac{1}{e} - \frac{1}{e^n} \le \frac{1}{e} - \frac{1}{e^{(n+1)}}$$

$I_n \le I_{n+1}$ donc la suite (I_n) est croissante.

2e Méthode – CLASSIQUE !

$$I_{n+1} - I_n = \int_1^{n+1} e^{-t}\,dt - \int_1^n e^{-t}\,dt = \int_1^{n+1} e^{-t}\,dt + \int_n^1 e^{-t}\,dt$$

$$I_{n+1} - I_n = \int_n^1 e^{-t}\,dt + \int_1^{n+1} e^{-t}\,dt = \int_n^{n+1} e^{-t}\,dt \qquad \text{(Relation de Chasles)}$$

Or $e^{-t} \ge 0$ et $n \le n+1$

donc d'après la propriété de positivité de l'intégrale, $\int_n^{n+1} e^{-t}\,dt \ge 0$

Propriété – POSITIVITE de l'intégrale

Si $f \ge 0$ et si $a \le b$ alors $\int_a^b f(x)\,dx \ge 0$

donc $I_{n+1} - I_n \ge 0$ et donc la suite (I_n) est croissante.