

Exercice 22

On considère les fonctions f et F définies sur \mathbb{R} par : $f(x) = x \sin x$ et $F(x) = \sin x - x \cos x$

1°) Démontrer que F est une primitive de f .

2°) En déduire $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx$.

CORRECTION

$$f(x) = x \sin x \quad \text{et} \quad F(x) = \sin x - x \cos x$$

1°) Dérivons F .

$$F'(x) = \cos x - (\cos x - x \times (-\sin x)) = \cos x - \cos x + x \sin x = x \sin x = f(x)$$

$F' = f$ donc F est une primitive de f .

$$2^\circ) \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx = \left[\sin x - x \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} - (\sin 0 - 0) = 1 - \frac{\pi}{2} \times 0 - 0 = 1.$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx = 1$$