Exo	CALCUL INTEGRAL

Applications du calcul intégral

9 – Soit la fonction f définie sur $]\,0\,,+\infty\,[$ par : $f(x)=\dfrac{\ln x}{x^2}$

1) Etudier les limites de f aux bornes de D_f .
2) Etudier les variations de f .
3) Tracer la courbe C (*repère orthogonal : unité 2 cm sut (Ox) et 6 cm sur (Oy)*).
4) Démontrer que la fonction F définie sur $]\,0\,,+\infty\,[$ par $F(x)=-\dfrac{\ln x}{x}-\dfrac{1}{x}$ est une primitive de f .
5) Calculer en cm², l'aire de la partie du plan limitée par C, l'axe des abscisses et les droites d'équation x = 1 et x = e.

CORRECTION

9 – Soit la fonction f définie sur $]\,0\,,+\infty\,[$ par : $f(x)=\dfrac{\ln x}{x^2}$

1) Etudier les limites de f aux bornes de D_f .

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0}\ln x=-\infty\\ \lim\limits_{x\to 0}x^2=0^+\end{array}\right\}\quad \lim\limits_{x\to 0}f(x)=-\infty$$

$$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\ln x}{x^n}=0 \quad \text{donc} \quad \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$$

2) Etudier les variations de f .

f forme $\dfrac{u}{v}$ avec $u(x)=\ln x$ et $v(x)=x^2$

$u'(x)=\dfrac{1}{x}$ et $v'(x)=2x$

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$$

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}x^2-(\ln x)\times(2x)}{x^4}=\frac{x-2x\ln x}{x^4}$$

$$f'(x)=\frac{x(1-2\ln x)}{x^4}=\frac{1-2\ln x}{x^3}$$

$x^3>0$ donc le signe de $f'(x)$ dépend de celui de $1-2\ln x$

$1-2\ln x\geq 0 \iff 1\geq 2\ln x \iff \ln x\leq\frac{1}{2}$

$\iff x\leq e^{1/2}$ car ln st ↗

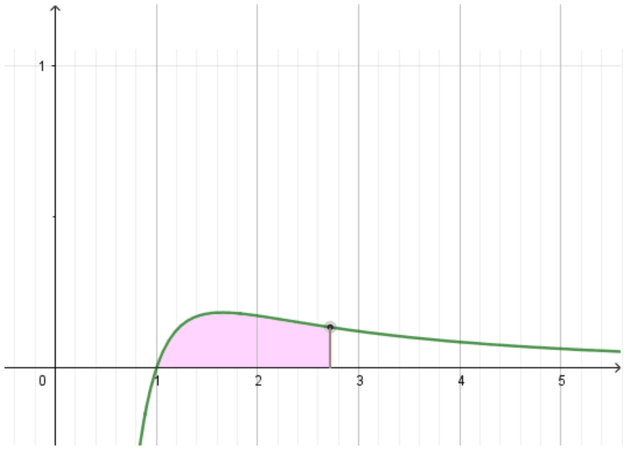
$\iff x\leq\sqrt{e}$

x	0		$\sqrt{e}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
f	‖ $-\infty$	↗	$\frac{1}{2e}$	↘	0

$$f(\sqrt{e})=\frac{\ln\sqrt{e}}{(\sqrt{e})^2}=\frac{\frac{1}{2}\ln e}{e}$$

$$f(\sqrt{e})=\frac{1}{2e}$$

3) Tracer la courbe C (*repère orthogonal : unité 2 cm sut (Ox) et 6 cm sur (Oy)*).



4) Démontrer que la fonction F définie sur] 0 , + ∞ [par $F(x) = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}$ est une primitive de f .

Dérivons F (forme U+V et $U = -\frac{u}{v}$)

$$F'(x) = -\frac{\frac{1}{x}x - \ln x}{x^2} - \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= -\frac{1-\ln x}{x^2} + \frac{1}{x^2} = \frac{-1+\ln x+1}{x^2}$$

$$F'(x) = \frac{\ln x}{x^2} = f(x)$$

donc F est bien une primitive de f

5) Calculer en cm², l'aire de la partie du plan limitée par C, l'axe des abscisses et les droites d'équation x = 1 et x = e.

Pour $1 \leq x \leq e$ $\ln 1 \leq \ln x \leq \ln e$

donc $0 \leq \ln x$ et on a $x^2 > 0$

donc $f \geq 0$

D'où $\mathcal{A} = \int_1^e f(x)\,dx$ u.a.

$\mathcal{A} = [F(x)]_1^e = F(e) - F(1)$

$\mathcal{A} = -\frac{1}{e} - \frac{1}{e} - (-1) = 1 - \frac{2}{e}$

Comme $1 \text{ u.a.} = \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\| \text{ cm}^2 = 2 \times 6 \text{ cm}^2$

$\mathcal{A} = 1 - \frac{2}{e} \text{ u.a} = 12\left(1 - \frac{2}{e}\right) \text{cm}^2$