PROBA20090514	*PROBABILITES*	TS

ENONCE :

BAC S - *Asie - juin 2006 modifié*

Pierre et Claude jouent au tennis. Les deux joueurs ont la même chance de gagner la première partie. Par la suite, lorsque Pierre gagne une partie, la probabilité qu'il gagne la suivante est 0,7. Et s'il perd une partie, la probabilité qu'il perde la suivante est 0,8.

Dans tout l'exercice, n est un entier naturel non nul.
On considère l'évènement Gn: « Pierre gagne la n-ième partie ».
On pose : p_n = p(Gn).

1. Recherche d'une relation de récurrence.
   a. Déterminer p_1, puis les probabilités conditionnelles $p_{G_1}(G_2)$ et $p_{\overline{G_1}}(G_2)$.
   b. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, $p_{n+1} = 0{,}5\, p_n + 0{,}2$.

2. Étude de la suite (p_n).
   On pose, pour tout entier naturel n non nul, $v_n = p_n - \dfrac{2}{5}$
   a. Prouver que la suite (v_n) est une suite géométrique et exprimer v_n en fonction de n.
   b. En déduire l'expression de p_n en fonction de n.
   c. Déterminer la limite de la suite (p_n) quand n tend vers $+\infty$.

Eléments de correction

Asie - juin 2006 modifié

Pierre et Claude jouent au tennis. Les deux joueurs ont la même chance de gagner la première partie. Par la suite, lorsque Pierre gagne une partie, la probabilité qu'il gagne la suivante est 0,7. Et s'il perd une partie, la probabilité qu'il perde la suivante est 0,8.

Dans tout l'exercice, n est un entier naturel non nul.
On considère l'évènement Gn: « Pierre gagne la n-ième partie ».
On pose : p_n = p(Gn).

1. Recherche d'une relation de récurrence.

a. $\boxed{p_1 = 0,5}$ (*énoncé*) ; $\boxed{p_{G_1}\left(G_2\right) = 0,7}$ (*énoncé*)

et $p_{\overline{G_1}}\left(\overline{G_2}\right) = 0,8$ (*énoncé*) donc $p_{\overline{G_1}}\left(G_2\right) = 1 - p_{\overline{G_1}}\left(\overline{G_2}\right) = 1 - 0,8$ $\boxed{p_{\overline{G_1}}\left(G_2\right) = 0,2}$

b. $p_{n+1} = p(G_{n+1}) = p(G_{n+1} \cap G_n) + p(G_{n+1} \cap \overline{G_n})$ formule des probabilités totales

$p_{n+1} = p_{G_n}(G_{n+1}) \times p(G_n) + p_{\overline{G_n}}(G_{n+1}) \times p(\overline{G_n})$

$p_{n+1} = 0,7 \times p_n + 0,2 \times (1 - p_n)$ car $p(\overline{G_n}) = 1 - p(G_n)$

donc $\boxed{p_{n+1} = 0,5\, p_n + 0,2}$.

2. Étude de la suite (p_n).

On pose, pour tout entier naturel n non nul, $v_n = p_n - \frac{2}{5}$

a. $v_{n+1} = p_{n+1} - \frac{2}{5} = 0,5\, p_n + 0,2 - \frac{2}{5} = 0,5\, p_n - 0,2 = 0,5\left(v_n + \frac{2}{5}\right) - 0,2$

$\boxed{v_{n+1} = 0,5 v_n}$ donc la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,5

$v_n = \left(0,5\right)^{n-1} v_1$ donc $\boxed{v_n = 0,1 \times \left(0,5\right)^{n-1}}$

b. $\boxed{p_n = v_n + \frac{2}{5} = 0,1 \times \left(0,5\right)^{n-1} + 0,4}$

c. $\lim\limits_{n \to +\infty} (0,5)^n = 0$ (-1 < q < 1) donc $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = 0,4}$