SUJET A

Devoir commun de seconde en mathématiques du 08/04/2010----Durée: 2 heures sur 40 points

NOM : Classe :

Exercice 1 *(14,5 points sur 40 points)*

Les parties I, II et III peuvent être traitées séparément. Cependant elles ont toutes pour objet d'étude la fonction *f* définie pour tout réel *x* par $f(x)=4x^2+4x-24$.

Partie I

On étudie l'algorithme suivant :

***f* est la fonction définie par *f(x)*= 4 *x*² +4 *x* -24.**

***x* prend la valeur 0.**

***Tant que x* ≤ 3 faire**

afficher le point de coordonnées (*x* ; *f* (*x*))

puis *x* prend la valeur *x* + 0,1

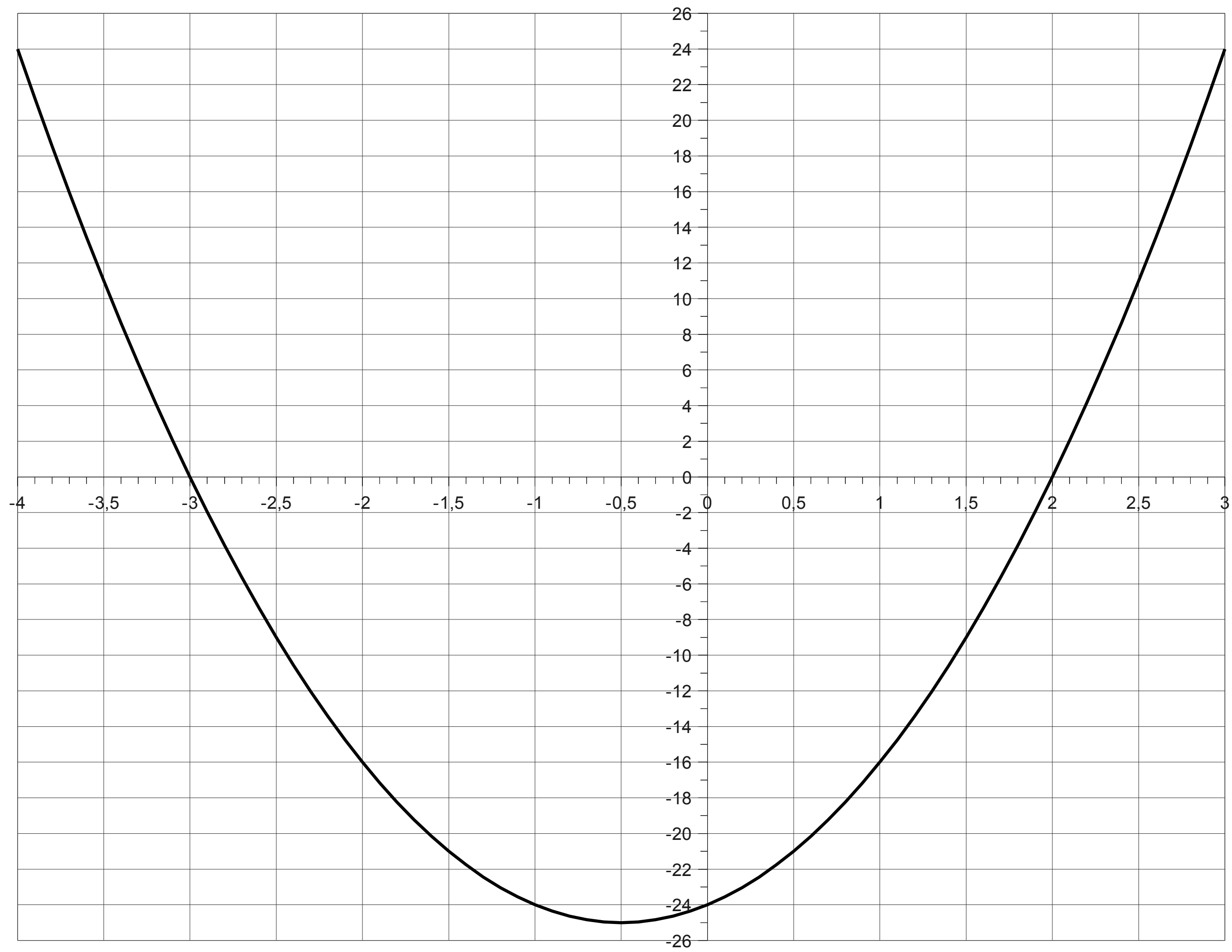
fin du tant que.

Fin de l'algorithme.

On fait fonctionner cet algorithme.

1. Calculer les coordonnées des deux premiers points affichés et les coordonnées du dernier point affiché.
2. Combien y a-t-il de points affichés au total ? *On ne demande que leur nombre et pas leurs coordonnées.*

Partie II (Graphique)



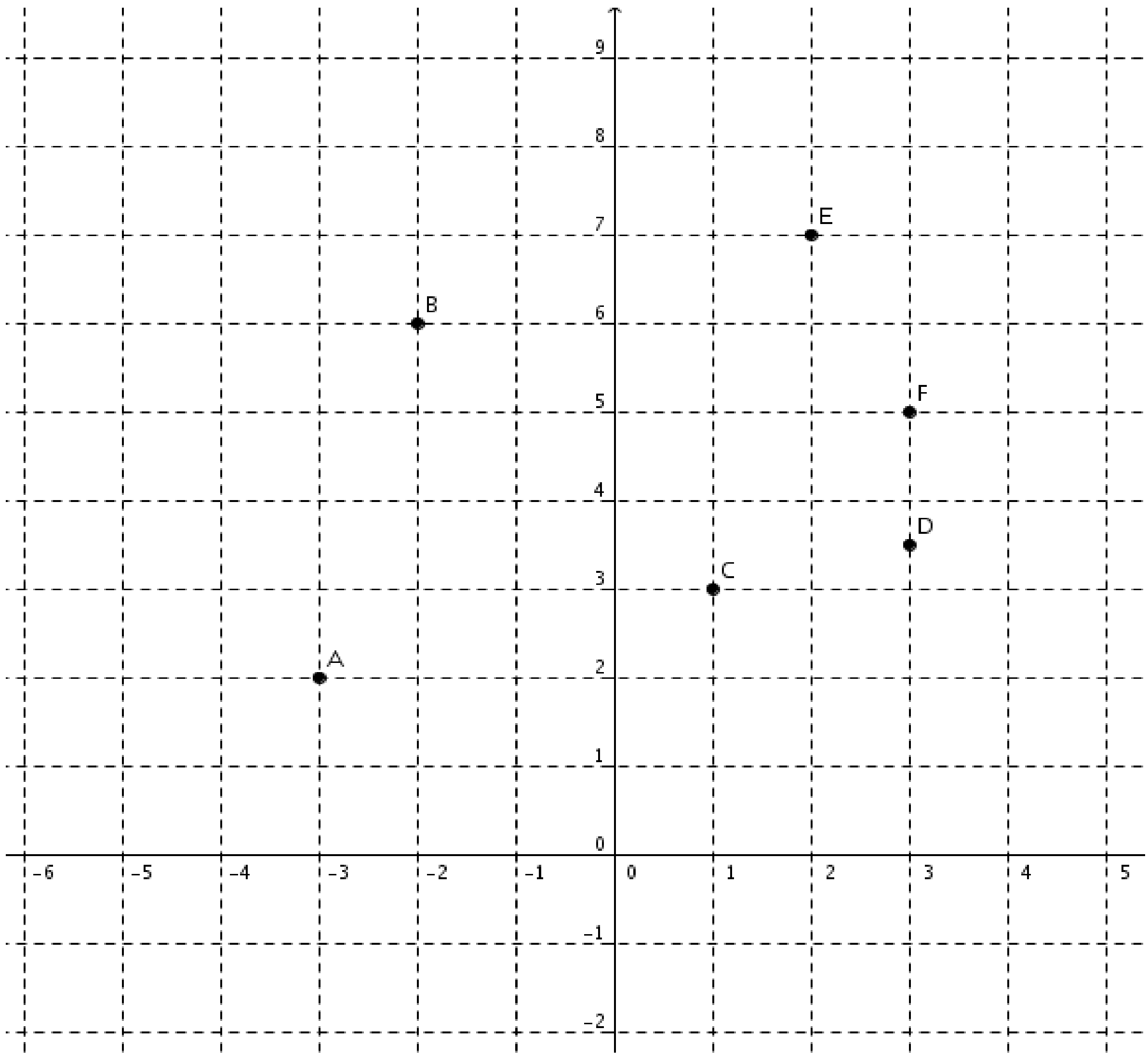
Partie II (Énoncé)
La fonction *f* est représentée graphiquement ci-contre, sur l'intervalle [- 4;3].

Dans cette partie, aucune justification n'est demandée. Les réponses sont à donner par lecture graphique. La précision demandée est de 0,1 avec une erreur de plus ou moins 0,1.

1. Donner l'image de -2 par la fonction *f*.
2. Donner l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x)<15$ dans [- 4; 3].
3. Donner les solutions de l'équation $f(x)=5$.
4. Donner le tableau de variation de la fonction *f* sur l'intervalle [- 4;3].

Partie III
Dans cette partie, toutes les réponses sont à justifier par des calculs.
La fonction *f* est définie pour tout réel *x* par $f(x)=4x^2+4x-24$.
1. En développant $(2x+1)^2-25$, montrer que pour tout *x* réel $f(x)=(2x+1)^2-25$.
2. En factorisant $(2x+1)^2-25$, montrer que pour tout *x* réel $f(x)=(2x+6)(2x-4)$.
3. Résoudre l'inéquation $f(x)<0$ dans $\mathbb{R}$.
4. Résoudre l'inéquation $\frac{1}{2x+6}-\frac{3}{2x-4}\geqslant 0$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 2 (graphique)



Exercice 2 (Énoncé) *(14 points sur 40)*

Dans le repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$, A(-3; 2), B(-2; 6), C(1; 3), $D\left(3,\frac{7}{2}\right)$, E(2;7) et F(3; 5).

Partie I :

Aucune justification n'est demandée.

1. Tracer le point M tel que $\overrightarrow{AM}=-2\,\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{BE}$. *Laisser les traits de construction.*
2. Donner une équation de la droite (BE) par lecture graphique.

Partie II :

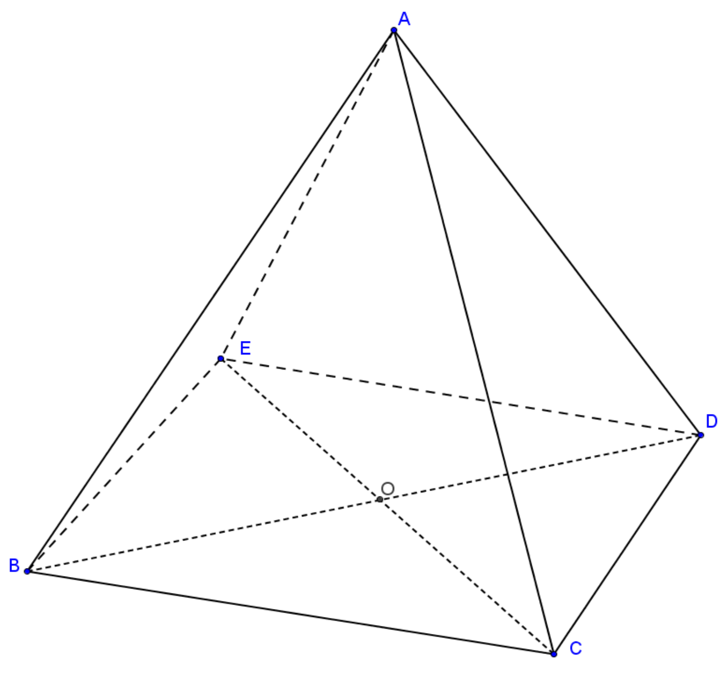
Toutes ces questions sont à justifier par des calculs.

1. Calculer une équation de la droite (AF).
2. Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AC}$.
3. Prouver que ACEB est un parallélogramme.
4. Calculer la longueur AB.
5. Prouver que ACEB est un losange.
6. Prouver que A, C et D sont alignés à l'aide de calculs utilisant les vecteurs.

Pour les questions 7. et 8., on donnera les résultats à l'aide de fractions irréductibles.

7. Calculer les coordonnées du point I milieu de [BC].
8. Calculer les coordonnées du point G tel que $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$. Comment s'appelle ce point G ?

Exercice 3 (Figure)



Exercice 3 (Énoncé) *(8,5 points sur 40)*
Le quadrilatère BCDE est un rectangle. O est l'intersection des diagonales du rectangle BCDE. La droite (AO) est perpendiculaire à la droite (BD).

Partie I: QCM
Une seule réponse par question est exacte. ECRIRE LA REPONSE SUR VOTRE FEUILLE (par exemple écrire « 5) réponse b) »). *Le barème par question est le suivant : réponse correcte : +1 point ; réponse incorrecte :* - 0,25 *point ; absence de réponse : 0 point. Si le total est négatif, il est ramené à 0.*

1. L'intersection des plans (ABC) et (ACD) est :
 a) la droite (AC). b) le segment [AC]. c) le point A. d) la droite (BD).

2. L'intersection des plans (ABD) et (ACE) est :
 a) le point A. b) le plan (BCD). c) le point O. d) la droite (AO).

3. Les droites (AC) et (BD) sont :
 a) coplanaires. b) parallèles. c) sécantes. d) non coplanaires.

4. L'intersection des plans (ABC) et (ADE) est :
 a) la droite passant par A et parallèle à (BD) b) la droite passant par A et parallèle à (BE)
 c) la droite passant par A et parallèle à (BC) d) la droite (AO)

Partie II: Calculs

On donne BC= 6 cm, CD= 4 cm et AB=AD = 7 cm
Répondre avec des valeurs exactes aux questions 1. ,2. et 3. .
1. Calculer la longueur BD.
2. En déduire la longueur BO.
3. Calculer la longueur AO.
4. Calculer une mesure de l'angle $\widehat{BAD}$ à un degré près.

Exercice 4 *(4 points sur 40)*

On étudie le chiffre d'affaires d'un supermarché au mois de Juillet 2009. Les résultats sont résumés dans le tableau suivant :

Chiffre d'affaires (en milliers d'euros)	132	159	167	170	175	176	182	186	189	190	191	308	352	383	401
Nombre de jours	2	2	3	2	3	2	1	2	1	2	1	1	1	2	1

1. Calculer le chiffre d’affaires moyen et écrire la formule de calcul utilisée. *Donner le résultat à un millier d'euros près.*
2. Déterminer le chiffre d’affaires médian. *Donner le résultat sans justification.*
3. Calculer le pourcentage de jours où le chiffre d'affaires journalier du supermarché est supérieur à 300 milliers d'euros ? *Donner le résultat à 0,01 % près.*

DEVOIR COMMUN DE MATHÉMATIQUES

>>> CORRIGE <<<

Sujet A

Exercice 1 : (Algorithme, fonction, inéquations) - 14,5 points sur 40

I - Algorithme (3 points) $f(x)=4x^2+4x-24$

1) $x=0$; On affiche le point de coordonnées $(0;f(0))$ donc $\boxed{(0;-24)}$;

   $x=0,1$; On affiche le point de coordonnées $(0,1;f(0,1))$ donc $\boxed{(0,1;-23,56)}$;

   $x=3$; On affiche le dernier point, de coordonnées $(3;f(3))$ donc $\boxed{(3;24)}$;

2) Au total, 31 points seront affichés.

II - Lectures graphiques (4,5 points)

1) $\boxed{f(-2)=-16}$;
2) Inéquation $f(x)<15$: $\boxed{S=]-3,7\,;2,7[}$ à 10^{-1} *près*
3) Equation $f(x)=5$: $\boxed{S=\{-3,2\ ;\ 2,2\}}$ à 10^{-1} *près*
4) Tableau de variation de f :

x	-4		$-0,5$		3
$f(x)$	24	$\searrow$	-25	$\nearrow$	24

III - Calculs algébriques-Inéquations (7 points)

Pour tout réel x , on a : $f(x)=4x^2+4x-24$.

1) $(2x+1)^2-25=4x^2+4x+1-25=4x^2+4x-24=f(x)$

   donc, $\boxed{\text{pour tout réel } x\text{, on a : } f(x)=(2x+1)^2-25}$.

2) $(2x+1)^2-25=\big((2x+1)-5\big)\big((2x+1)+5\big)=(2x-4)(2x+6)$

   donc, $\boxed{\text{pour tout réel } x\text{, on a : } f(x)=(2x+6)(2x-4)}$.

3) $f(x)<0 \Leftrightarrow (2x+6)(2x-4)<0$

   Dressons un tableau de signes sur IR de $f(x)=(2x+6)(2x-4)$:

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
$2x+6$		$-$	0	$+$		$+$	
$2x-4$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$2x+6=0 \Leftrightarrow 2x=-6 \Leftrightarrow x=-3$

$2x-4=0 \Leftrightarrow 2x=4 \Leftrightarrow x=2$

$\boxed{S=]-3;2[}$

4) $\dfrac{1}{2x+6}-\dfrac{3}{2x-4}\geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{2x-4}{(2x+6)(2x-4)}-\dfrac{3(2x+6)}{(2x+6)(2x-4)}\geq 0$

$$\Leftrightarrow \frac{2x-4-6x-18}{(2x+6)(2x-4)}\geq 0 \Leftrightarrow \frac{-4x-22}{(2x+6)(2x-4)}\geq 0$$

Dressons un tableau de signes sur IR de $Q(x)=\dfrac{-4x-22}{(2x+6)(2x-4)}=\dfrac{-4x-22}{f(x)}$:

$$-4x-22=0 \Leftrightarrow -4x=22 \Leftrightarrow x=-\frac{22}{4} \Leftrightarrow x=-\frac{11}{2}$$

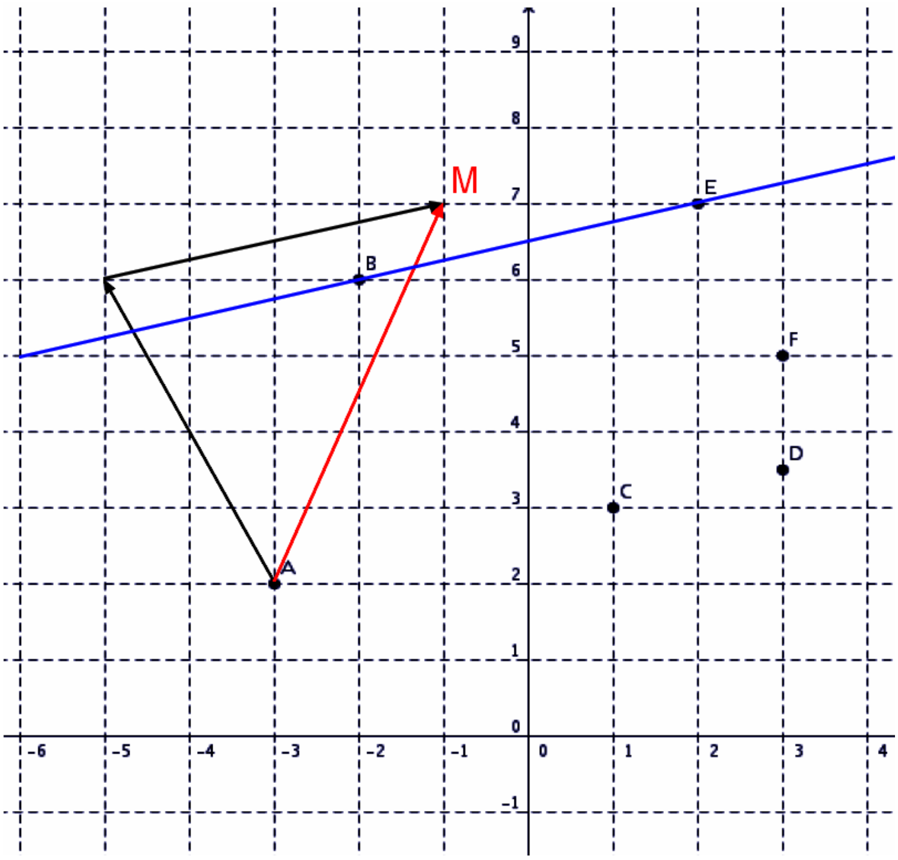
x	$-\infty$		$-\frac{11}{2}$		-3		2		$+\infty$
$-4x-22$		$+$	0	$-$	|	$-$	|	$-$	
$f(x)$		$+$	|	$+$	0	$-$	0	$+$	
$Q(x)$		$+$	0	$-$	||	$+$	||	$-$	

$$\boxed{S=\left]-\infty\,;-\frac{11}{2}\right]\cup\left]-3\,,2\right[}$$

Exercice 2 : (Vecteurs, repérage, équations de droites) - *14 points sur 40*

I - Construction-Equation de droite (*2 points*)

1)



2) Pour (BE) : l'ordonnée à l'origine est 6,5 et le coefficient directeur est : $0,25$

L'équation cherchée est : $\boxed{y=0,25x+6,5}$

II - Repérage (*12 points*)

1) Pour (AF) : l'équation cherchée est de la forme $y = mx + p$.

Le coefficient directeur est $m = \dfrac{y_F - y_A}{x_F - x_A} = \dfrac{5-2}{3-(-3)} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$

$A \in (AF)$ donc $y_A = m x_A + p$ donc $2 = \dfrac{1}{2} \times (-3) + p$ donc $2 + \dfrac{3}{2} = p$ donc $p = \dfrac{7}{2}$

donc la droite (AF) a pour équation $\boxed{y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{7}{2}}$

2) $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 1-(-3) \\ 3-2 \end{pmatrix}$ donc $\boxed{\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}}$

3) $\overrightarrow{BE}\begin{pmatrix} x_E - x_B \\ y_E - y_E \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{BE}\begin{pmatrix} 2-(-2) \\ 7-6 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BE}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BE}$ donc $\boxed{\text{ACEB est un parallélogramme}}$

4) AB = $\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{1^2 + 4^2} = \sqrt{1+16} = \sqrt{17}$ $\boxed{\text{AB} = \sqrt{17}}$

5) BE = $\|\overrightarrow{BE}\| = \sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{16+1} = \sqrt{17}$

AB = BE

ACEB est donc un parallélogramme dont deux côtés consécutifs sont égaux

donc $\boxed{\text{ACEB est un losange}}$

6) $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix} x_D - x_A \\ y_D - y_A \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix} 6 \\ 3/2 \end{pmatrix}$

$\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont colinéaires *si et seulement si* x y' – x'y = 0

Or x y' – x'y = $4 \times \dfrac{3}{2} - 6 \times 1 = 6 - 6 = 0$ donc x y' – x'y = 0

donc $\boxed{\text{les points A, C, D sont alignés}}$

7) Coordonnées du point I de [BC].

$x_I = \dfrac{x_B + x_C}{2} = \dfrac{-2+1}{2} = -\dfrac{1}{2}$ et $y_I = \dfrac{y_B + y_C}{2} = \dfrac{6+3}{2} = \dfrac{9}{2}$ $\boxed{\text{I}\left(-\dfrac{1}{2} ; \dfrac{9}{2}\right)}$

8) G vérifie l'égalité vectorielle : $\overrightarrow{AG} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AI}$

$\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix} x_G - x_A \\ y_G - y_A \end{pmatrix}$ donc $\boxed{\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix} x_G + 3 \\ y_G - 2 \end{pmatrix}}$ et $\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix} x_I - x_A \\ y_I - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{5}{2} \\ \dfrac{5}{2} \end{pmatrix}$ donc $\boxed{\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix} \dfrac{5}{3} \\ \dfrac{5}{3} \end{pmatrix}}$

$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$ donc $\begin{cases} x_G + 3 = \frac{5}{3} \\ y_G - 2 = \frac{5}{3} \end{cases}$ donc $\begin{cases} x_G = -\frac{4}{3} \\ y_G = \frac{11}{3} \end{cases}$ donc $\boxed{G\left(-\frac{4}{3}; \frac{11}{3}\right)}$

$\boxed{\text{G est le centre de gravité du triangle ABC}}$

Exercice 3 : (Géométrie dans l'espace) - *8,5 points sur 40*

I - QCM (*4 points*)

1) $\boxed{a}$ 2) $\boxed{d}$ 3) $\boxed{d}$ 4) $\boxed{c}$

II - Calculs (*4,5 points*)

1) Utilisons le théorème de Pythagore dans le triangle BCD rectangle en C :
BD ² = BC ² + CD ²
D'où BD² = 6 ² + 4 ² = 36 + 16 = 52 et donc $\boxed{BD = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}}$

2) O est le milieu de [BD] car BCDE est un rectangle ;
Donc $BO = \frac{BD}{2}$ et donc $\boxed{BO = \sqrt{13}}$

3) Utilisons le théorème de Pythagore dans le triangle OAB rectangle en O :
AB ² = AO ² + OB ²
D'où $7^2 = AO^2 + (\sqrt{13})^2$ donc $49 = AO^2 + 13$ donc $AO^2 = 36$ donc $\boxed{AO = 6}$

4) Dans le triangle OAB rectangle en O,
$\cos\left(\widehat{BAO}\right) = \frac{adjacent}{hypoténuse} = \frac{AO}{AB} = \frac{6}{7}$; On trouve $\boxed{\widehat{BAO} = 31°}$ à un degré près.

Or le triangle ABD est isocèle en A, donc $\widehat{BAD} = 2 \times \widehat{BAO}$;

On trouve $\boxed{\widehat{BAD} = 62°}$ à un degré près.

Exercice 4 : (Statistiques) - *4 points sur 40*

1) $\bar{x} = \frac{\sum effectif \times valeur\ du\ caractère}{effectif\ total} = \frac{\sum_{i=1}^{n} n_i x_i}{N}$

$\boxed{\text{Le chiffre d'affaires moyen est de 208 milliers d'euros environ}}$.

2) $\boxed{\text{Le chiffre d'affaires médian est de 176 milliers d'euros}}$

3) Le nombre de jours où le chiffre d'affaires est supérieur à 300 milliers d'euros est de 5 ;

Le pourcentage est donc : $\frac{5}{26} \times 100$; $\boxed{\text{Le pourcentage de jours est de 19,23\% à 0,01\% près}}$.